



А. С. МИЩЕНКО  
Б. Ю. СТЕРНИН  
В. Е. ШАТАЛОВ

# ЛАГРАНЖЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ И МЕТОД КАНОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1 9 7 8

**Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора.** А. С. Мищенко, Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1978.

В книге излагаются топологические и аналитические основы теории канонического оператора Маслова для нахождения асимптотических решений широкого класса псевдодифференциальных уравнений. Подробно исследована топология и геометрия лагранжевых многообразий. Установлены связи между интегральными операторами Фурье и каноническим оператором. Даны приложения к нахождению асимптотических решений задачи Коши и нахождению асимптотики спектров несамосопряженных операторов.

Книга будет интересна широкому кругу математиков — специалистов по топологии, дифференциальным уравнениям и функциональному анализу, студентам и аспирантам математических специальностей.

Александр Сергеевич Мищенко  
Борис Юрьевич Стернин  
Виктор Евгеньевич Шаталов

**ЛАГРАНЖЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ  
И МЕТОД. КАНОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА**

М., 1978 г., 352 стр. с илл.

Редактор Ю. П. Соловьев  
Техн. редактор Е. В. Морозова  
Корректор Н. В. Хрипунова

ИБ № 2044

Сдано в набор 30.01.78. Подписано к печати 24.05.78. Т-11605.  
Бумага 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>, тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать.  
Услови. печ. л. 18,48. Уч.-изд. л. 17,33. Тираж 5800 экз. Заказ № 4032  
Цена книги 1 р. 40 к.

Издательство «Наука»  
Главная редакция физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография изд-ва «Наука», Москва, Шубинский пер., 10.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
Введение . . . . .	9

### часть I

#### ТОПОЛОГИЯ ЛАГРАНЖЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Глава I. Некоторые сведения из топологии . . . . .	33
§ 1.1. Многообразия и расслоения . . . . .	33
§ 1.2. Теоремы о трансверсальной регулярности . . . . .	75
§ 1.3. Индекс пересечения подмногообразий . . . . .	90
§ 1.4. Гомотопические группы . . . . .	98
Глава II. Геометрия вещественных лагранжевых многообразий . . . . .	101
§ 2.1. Лагранжевы многообразия в гамильтоновом пространстве . . . . .	101
§ 2.2. Когомологии лагранжева грассманиана . . . . .	108
§ 2.3. Характеристические классы лагранжева многообразия . . . . .	119
§ 2.4. Лагранжево многообразие в общем положении . . . . .	127
Глава III. Комплексные лагранжевы многообразия . . . . .	133
§ 3.1. Грассманиан положительных лагранжевых плоскостей . . . . .	133
§ 3.2. Индекс комплексных лагранжевых многообразий . . . . .	141

### часть II

#### КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР

#### НА ВЕЩЕСТВЕННОМ ЛАГРАНЖЕВОМ МНОГООБРАЗИИ

Глава IV. Канонический оператор Маслова (элементарная теория) . . . . .	156
§ 4.1. Конструкция элементарного канонического оператора . . . . .	156
§ 4.2. Коммутация канонического оператора и оператора Гамильтона . . . . .	169

<b>Глава V. Асимптотика интегралов быстро осциллирующих функций</b>	<b>186</b>
§ 5.1. Формула асимптотического разложения интеграла быстро осциллирующей функции	187
§ 5.2. Метод осциллятора для асимптотического разложения интеграла	200
§ 5.3. Вычисление членов асимптотического разложения	211
§ 5.4. Применение к неаналитическому случаю и лагранжевым многообразиям	221
<b>Глава VI. Канонический оператор Маслова (общая теория)</b>	<b>225</b>
§ 6.1. Существование и единственность канонического оператора	226
§ 6.2. Гамильтонов формализм и операторы $\mathcal{P}_I$	229
§ 6.3. Коммутация оператора Гамильтона и канонического оператора	235
§ 6.4. Геометрическая интерпретация операторов $V_{IJ}$ и канонического оператора	238
Добавление I. $1/h$ -преобразование Фурье	241
Добавление II. Одна абстрактная лемма	243
<b>Глава VII. Интегральные операторы Фурье (гладкая теория канонического оператора)</b>	<b>246</b>
§ 7.1. Канонические распределения в пространстве $\mathbf{R}^n$	259
§ 7.2. Канонические распределения на многообразиях	272
§ 7.3. Определение и примеры интегральных операторов Фурье	284
§ 7.4. Регуляризация задачи Коши	287
§ 7.5. Теоремы об ограниченности и о композиции интегральных операторов Фурье	291
<b>Глава VIII. Некоторые приложения</b>	<b>299</b>
§ 8.1. Асимптотические решения задачи Коши	299
§ 8.2. Асимптотика спектра $1/h$ -псевдодифференциальных операторов	312
§ 8.3. Системы уравнений	331
Литература	344
Предметный указатель	352

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге излагается метод канонического оператора Маслова для нахождения асимптотических решений псевдодифференциальных уравнений. Классический метод ВКБ, названный так по имени его авторов: Вентцеля, Крамерса, Бриллюэна, был создан для нахождения квазиклассических приближений в квантовой механике. Простота, наглядность и «физичность» этого метода быстро завоевали ему популярность: специалисты по математической физике безоговорочно приняли его на вооружение, и число публикаций, связанных в той или иной мере с методом ВКБ, к настоящему моменту не поддается, по-видимому, подсчету.

Альтернативное название метода ВКБ в задачах дифракции — лучевой метод или метод геометрической оптики — показывает, что приближения в методе ВКБ строятся с помощью лучей. Более точно, с помощью лучей строится первое приближение метода ВКБ (выделяется сингулярная часть), после чего применяются обычные методы (регулярной) теории возмущений.

Однако лучевой метод неприменим в точках пространства, где лучи фокусируются или образуют каустику. Математически этот факт проявляется в том, что в таких точках амплитуда волны бесконечна. Физики знали некоторые «эталонные» уравнения (например, уравнения Эйри), решения которых были определены всюду, включая фокальные точки. Естественно поэтому, что первыми и наиболее удачными попытками справиться с труд-

ностями, возникающими в фокальных (каустических) точках, был так называемый метод эталонных уравнений, сущность которого состоит в замене произвольного уравнения в окрестности фокальной точки некоторым стандартным («эталонным»). Метод эталонных уравнений привлекает своей простотой и законченностью результатов: действительно, даже в окрестности особых точек решения представляются посредством функций, значения которых, как правило, протабулированы. Прекрасным изложением метода эталонных уравнений может служить книга В. М. Бабича и В. С. Булдырева [1]. Но метод эталонных уравнений, хорошо работающий в классических задачах математической физики, оказывается недостаточно общим для того, чтобы получать асимптотические решения многих интересных задач в теории дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений с частными производными.

Мощным инструментом для решения задач такого рода является созданный В. П. Масловым в 1965 году принципиально новый метод получения асимптотических решений — метод канонического оператора [1]. Не вдаваясь в сущность метода \*), отметим его универсальность. Метод канонического оператора работает в таких, казалось бы, далеких друг от друга областях, как квазиклассическая асимптотика квантовой механики и проблема устойчивости разностных схем, задача о распространении «в большом» разрыва решений гиперболических уравнений и коротковолновая асимптотика в задачах дифракции, распространение волн в ионосфере и проблема существования и единственности в общей теории псевдодифференциальных уравнений.

Метод канонического оператора вскрыл также топологическую природу известного эффекта о скачке фазы

---

\*) См. по этому поводу Введение.

якобиана при переходе через фокальную точку. В частности, В. И. Арнольдом [1] был вычислен характеристический класс, входящий в условия квантования и реализующий так называемый индекс Маслова на лагранжевом многообразии. Индекс Маслова, как и условия квантования, играет основную роль при нахождении асимптотики спектра.

В настоящее время метод канонического оператора Маслова широко используется как советскими, так и зарубежными математиками в различных задачах, связанных с асимптотическими разложениями. Мы здесь хотим отметить в первую очередь работы В. И. Арнольда [1] — [4], В. С. Буслаева [1], [2], А. М. Виноградова [1], Е. М. Воробьева [1], Ю. А. Кравцова [2], В. В. Кучеренко [1] — [5], В. П. Маслова [2], А. С. Мищенко и Б. Ю. Стернина [1], А. С. Мищенко, Б. Ю. Стернина, В. Е. Шаталова [1], Ж. Лере [1], Д. П. Экмана, Р. Сеньора [1], Д. М. Сурио [1], А. Вороса [1], [2] и др.

С точки зрения метода канонического оператора вызывает большой интерес целый ряд тонких и изящных исследований по математическим задачам дифракции, проводимых ленинградскими математиками В. М. Бабичем и В. С. Булдыревым [1] и др. (см. библиографию).

Наконец, упомянем еще об одном аспекте, связанном с каноническим оператором, — о формуле асимптотического разложения интеграла быстро осциллирующей функции. Эта формула играет основную роль при доказательстве инвариантности канонического оператора; она используется при установлении формулы коммутации псевдодифференциального оператора и быстро осциллирующей экспоненты и является важным инструментом теории. Фундаментальные результаты, касающиеся разложения интеграла быстро осциллирующей функции методом стационарной фазы, принадлежат М. В. Федорюку [1] — [3].



В недавних работах В. И. Арнольд [1]—[3] исследовал асимптотику интеграла в «неморсовском» случае и нашел связи порядка убывания с числами Кокстера.

Часть I этой книги (главы I, II, III) написана А. С. Мищенко, главы IV, VI и параграфы 2, 3 главы VIII написаны Б. Ю. Стерниным, глава V и параграф 1 главы VIII написаны В. Е. Шаталовым. Глава VII написана совместно Б. Ю. Стерниным и В. Е. Шаталовым (при участии В. Г. Ошмяна и В. Е. Назайкинского).

*Авторы*

## ВВЕДЕНИЕ

В книге излагается построение асимптотических по малому параметру  $\hbar$  решений дифференциальных (и псевдодифференциальных) уравнений. Эти асимптотические решения строятся с помощью метода канонического оператора Маслова, позволяющего получить не только локальные, но и глобальные решения рассматриваемых уравнений. Целью этого введения является иллюстрация наиболее важных явлений, возникающих при построении асимптотических решений  $1/\hbar$ -псевдодифференциальных уравнений как с вещественным, так и с комплексным символом (гамильтонианом). Этим отчасти определяется стиль изложения материала во Введении. Мы излагаем материал «эвристически», не в строгой логической последовательности, опуская иногда некоторые подробности в определениях и доказательствах в тех случаях, когда эти подробности имеют технический характер и приводят к усложнению формулировок. Для иллюстрации метода мы рассмотрим ряд примеров, начиная с самых простых.

1. В качестве первого примера мы рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Именно, пусть

$$P_n(p) = \sum_{j=0}^n a_j p^j$$

— некоторый полином от одной переменной  $p$  степени  $n$ . С помощью формальной замены переменной  $p$  на оператор

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

в полиноме  $P_n(p)$  мы получим дифференциальный оператор

$$P_n(\hat{p}) = P_n\left(-ih \frac{d}{dx}\right) = \sum a_j (-ih)^j \frac{d^j}{(dx)^j}$$

с постоянными (зависящими от  $h$ ) коэффициентами.

Рассмотрим задачу построения решений однородного уравнения

$$P_n(\hat{p})\psi(x) = \sum a_j (-ih)^j \frac{d^j \psi}{(dx)^j} = 0. \quad (1)$$

В соответствии с методом Эйлера будем искать решение этой задачи в виде

$$\psi(x) = \exp\left\{i \frac{\lambda}{h} x\right\} c, \quad c = \text{const.} \quad (2)$$

Поскольку

$$\hat{p} \exp\left\{i \frac{\lambda}{h} x\right\} c = -ih \frac{d}{dx} \left[ \exp\left\{\frac{i}{h} \lambda x\right\} c \right] = \lambda \exp\left\{\frac{i}{h} \lambda x\right\} c,$$

то, подставляя функцию (2) в уравнение (1), получим соотношение

$$P_n(\hat{p})\psi(x) = P_n(\lambda) \exp\left\{\frac{i}{h} \lambda x\right\} c = 0. \quad (3)$$

Для того чтобы удовлетворить уравнению (3), мы должны потребовать, чтобы число  $\lambda$  было решением (алгебраического) уравнения

$$P_n(\lambda) = 0, \quad (4)$$

которое обычно называется характеристическим уравнением для дифференциального уравнения (1). Мы будем называть уравнение (4) и аналогичные уравнения, которые получим в дальнейшем, *уравнениями Гамильтона — Якоби*.

Заметим, что в обозначениях, принятых в механике, можно переписать решение уравнения (1) в виде

$$\psi(x) = \exp\left\{\frac{i}{h} S(x)\right\} c,$$

где функция  $S(x) = \lambda x$  называется *действием*. Мы будем и в дальнейшем придерживаться этой терминологии.

Заметив, что при этом

$$\lambda = \partial S / \partial x,$$

уравнение (4) можно переписать в виде, совпадающем с классическим видом уравнения Гамильтона — Якоби:

$$P_n(\partial S(x) / \partial x) = 0. \quad (5)$$

Тот факт, что решением уравнения Гамильтона — Якоби (5) является линейная функция, связан с частным видом рассмотренного уравнения (уравнения с постоянными коэффициентами). Кроме того, заметим, что решение уравнения Гамильтона — Якоби (5) существует при всех  $x$  («в целом»); более того, в данном случае мы получили не асимптотическое, а *точное* решение уравнения (1).

2. В качестве следующего примера рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$\hat{E} + P_n(\hat{p}) = -ih \frac{\partial}{\partial t} + P_n\left(-ih \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

с частными производными, где  $P_n(p)$  — полином (1). Мы ввели здесь обозначения

$$\hat{E} = -ih \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{p} = -ih \frac{\partial}{\partial x}.$$

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального оператора

$$\hat{E} + P_n(\hat{p})$$

с начальными условиями специального вида:

$$\begin{aligned} [\hat{E} + P_n(\hat{p})] \psi(x, t) &= \left[ -ih \frac{\partial}{\partial t} + P_n\left(-ih \frac{\partial}{\partial x}\right) \right] \psi(x, t) = 0, \\ \psi(x, 0) &= \exp\left\{ \frac{i}{h} \alpha x \right\} c_0, \quad \alpha, c_0 = \text{const.} \end{aligned} \quad (6)$$

По аналогии с уравнением (1) ищем решение задачи (6) в виде

$$\psi(x, t) = \exp\left\{ \frac{i}{h} (\lambda_1 x + \lambda_2 t) \right\} c. \quad (7)$$

Подставляя функцию (7) в систему (6) и учитывая соотношения

$$\begin{aligned}\hat{E}\psi(x, t) &= \left(-ih \frac{\partial}{\partial t}\right) \exp\left\{\frac{i}{h}(\lambda_1 x + \lambda_2 t)\right\} c = \\ &= \exp\left\{\frac{i}{h}(\lambda_1 x + \lambda_2 t)\right\} \lambda_2 c, \\ \hat{p}\psi(x, t) &= \left(-ih \frac{\partial}{\partial x}\right) \exp\left\{\frac{i}{h}(\lambda_1 x + \lambda_2 t)\right\} c = \\ &= \exp\left\{\frac{i}{h}(\lambda_1 x + \lambda_2 t)\right\} \lambda_1 c,\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}[\hat{E} + P_n(\hat{p})]\psi(x, t) &= \exp\left\{\frac{i}{h}(\lambda_1 x + \lambda_2 t)\right\} [\lambda_2 + P_n(\lambda_1)] c = 0, \\ \psi(x, 0) &= \exp\left\{\frac{i}{h}\lambda_1 x\right\} c = \exp\left\{\frac{i}{h}\alpha x\right\} c_0.\end{aligned}$$

Эти равенства показывают, что для того, чтобы функция (7) была решением задачи (6), необходимо потребовать выполнения соотношений

$$\lambda_2 + P_n(\lambda_1) = 0, \quad \lambda_1 = \alpha, \quad c = c_0. \quad (8)$$

Первое из них есть *уравнение Гамильтона — Якоби* для задачи (6). Если обозначить действие, входящее в формулу (7), через  $S(x, t)$ :

$$S(x, t) = \lambda_1 x + \lambda_2 t,$$

то можно записать уравнение Гамильтона — Якоби в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + P_n\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0. \quad (9)$$

Соотношение  $\lambda_1 = \alpha$  дает начальное условие для уравнения (9), которое можно записать в виде

$$S(x, 0) = S_0(x) = \alpha x. \quad (10)$$

Уравнение (9) вместе с начальным условием (10) представляет собой задачу Коши для нелинейного уравнения Гамильтона — Якоби. В рассматриваемом случае решение этой задачи легко может быть получено непосредственно. Именно, соотношения (8) дают выражение

для функции  $S(x, t)$ :

$$S(x, t) = \alpha x - P_n(\alpha) t$$

и формулу для решения задачи (9):

$$\psi(x, t) = \exp \left\{ \frac{i}{h} (\alpha x - P_n(\alpha) t) \right\} c_0.$$

Отметим, что и в этом случае получено решение уравнения Гамильтона — Якоби в целом (в виде линейной функции), а решение  $\psi(x, t)$ , определенное последней формулой, является точным (а не асимптотическим) решением задачи (6).

3. Для иллюстрации дальнейших особенностей теории мы заменим начальное условие в задаче (6) на более общее. Именно, рассмотрим задачу Коши

$$[\hat{E} + P_n(\hat{p})] \psi(x, t) = 0, \quad (11)$$

$$\psi(x, 0) = \exp \left\{ \frac{i}{h} (\lambda_1 x + \lambda_2 t) \right\} \varphi_0(x).$$

Будем искать решение в виде, аналогичном (7), с очевидным изменением, связанным с видом начального условия:

$$\psi(x, t) = \exp \left\{ \frac{i}{h} (\lambda_1 x + \lambda_2 t) \right\} \varphi(x, t). \quad (12)$$

При исследовании уравнения (11) выявляются существенные отличия от двух рассмотренных ранее случаев. Проведем подстановку функции (12) в уравнение (11). Для этого используем соотношения

$$\begin{aligned} \hat{E}\psi(x, t) &= \left( (-ih) \frac{\partial}{\partial t} \right) \exp \left\{ \frac{i}{h} (\lambda_1 x + \lambda_2 t) \right\} \varphi(x, t) = \\ &= \exp \left\{ \frac{i}{h} (\lambda_1 x + \lambda_2 t) \right\} \left[ \lambda_2 \varphi(x, t) - ih \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} \right] = \\ &= \exp \left\{ \frac{i}{h} (\lambda_1 x + \lambda_2 t) \right\} \left[ \lambda_2 - ih \frac{\partial}{\partial t} \right] \varphi(x, t), \\ \hat{p}\psi(x, t) &= \left( -ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \exp \left\{ \frac{i}{h} (\lambda_1 x + \lambda_2 t) \right\} \varphi(x, t) = \\ &= \exp \left\{ \frac{i}{h} (\lambda_1 x + \lambda_2 t) \right\} \left[ \lambda_1 \varphi(x, t) - ih \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \right] = \\ &= \exp \left\{ \frac{i}{h} (\lambda_1 x + \lambda_2 t) \right\} \left[ \lambda_1 - ih \frac{\partial}{\partial x} \right] \varphi(x, t). \end{aligned}$$

В результате получим

$$[\hat{E} + P_n(\hat{p})] \psi(x, t) = \exp \left\{ \frac{i}{h} (\lambda_1 x + \lambda_2 t) \right\} \left[ \left( \lambda_2 - ih \frac{\partial}{\partial t} \right) + \right. \\ \left. + P_n \left( \lambda_1 - ih \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \varphi(x, t) = 0, \quad (13)$$

где

$$P_n \left( \lambda_1 - ih \frac{\partial}{\partial x} \right) = \sum a_j \left( \lambda_1 - ih \frac{\partial}{\partial x} \right)^j.$$

Начальные условия системы (11) дают

$$\psi(x, 0) = \exp \left\{ \frac{i}{h} \lambda_1 x \right\} \varphi(x, 0) = \exp \left\{ \frac{i}{h} \alpha x \right\} \varphi_0(x),$$

и достаточно потребовать, чтобы были выполнены соотношения

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \varphi(x, 0) = \varphi_0(x).$$

Заметим теперь, что выражение в квадратных скобках, стоящее в правой части соотношения (13), представляет собой полином относительно переменной  $h$  с коэффициентами — дифференциальными операторами. Для вычисления коэффициентов заметим, что рассматриваемое выражение

$$\left( \lambda_2 - ih \frac{\partial}{\partial t} \right) + P_n \left( \lambda_1 - ih \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

можно получить из функции

$$(\lambda_2 - ihE') + P_n(\lambda_1 - ihp') = F(h) \quad (14)$$

формальной заменой  $E'$  на  $\partial/\partial t$  и  $p'$  на  $\partial/\partial x$ . Разложим функцию (14) в ряд Тейлора по переменной  $h$ . Поскольку  $P_n$  — полином степени  $n$ , полученный ряд Тейлора обрывается на  $n$ -м члене:

$$F(h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} \frac{d^k}{dh^k} F(h) \Big|_{h=0} = (\lambda_2 + P_n(\lambda_1)) + \\ + h \left( -iE' - i \frac{\partial P_n}{\partial p}(\lambda_1) p' \right) + \sum_{k=2}^n \frac{h^k}{k!} (-i)^k \frac{\partial^k P_n}{\partial p^k}(\lambda_1) (p')^k.$$

Если в выражении (14) произвести замену  $E'$  на  $\partial/\partial t$  и

$p'$  на  $\partial/\partial x$ , то получим равенство

$$\left(\lambda_2 - ih \frac{\partial}{\partial t}\right) + P_n \left(\lambda_1 - ih \frac{\partial}{\partial x}\right) = (\lambda_2 + P_n(\lambda_1)) - \\ - ih \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial P_n}{\partial p}(\lambda_1) \frac{\partial}{\partial x}\right) + \sum_{k=2}^n \frac{(-ih)^k}{k!} \frac{\partial^k P_n}{\partial p^k}(\lambda_1) \frac{\partial^k}{\partial x^k}.$$

С учетом последней формулы соотношение (13) можно переписать в виде

$$\exp\left\{\frac{i}{h}(\lambda_1 x + \lambda_2 t)\right\} \left\{(\lambda_2 + P_n(\lambda_1)) \varphi(x, t) - \right. \\ \left. - ih \left(\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial P_n}{\partial p}(\lambda_1) \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{k=2}^n \frac{(-ih)^k}{k!} \frac{\partial^k P_n}{\partial p^k}(\lambda_1) \frac{\partial^k \varphi(x, t)}{\partial x^k} \right\} = 0. \quad (15)$$

Из формулы (15) видно, что с помощью выбора констант  $\lambda_1, \lambda_2$  и функции  $\varphi(x, t)$  нельзя получить точного решения задачи (11). Однако, приравнявая к нулю возможно большее число членов в разложении (15), мы получим асимптотическое по  $\hbar$  решение задачи (11).

Таким образом, получим уравнение

$$\lambda_2 + P_n(\lambda_1) = 0 \quad (16)$$

для определения констант  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и уравнение

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial P_n(\lambda_1)}{\partial p} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

для определения функции  $\varphi(x, t)$ . Уравнение (16) называется *уравнением Гамильтона — Якоби*, а уравнение (17) — *уравнением переноса*.

Уравнение Гамильтона — Якоби решается в точности так же, как и в предыдущем случае. Решение этого уравнения записывается в виде

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = -P_n(\alpha), \quad S(x, t) = \alpha x - P_n(\alpha) t.$$

Уравнение переноса можно переписать в более удобной форме, эквивалентной (17). Рассмотрим на плоскости  $(x, t)$  векторное поле, координаты которого не зависят от



$x$  и  $t$  и равны  $v = \left( \frac{\partial P_n}{\partial p}(\lambda_1), 1 \right)$  (рис. 1). Тогда в левой части уравнения стоит производная вдоль траекторий векторного поля  $v$ . Уравнение переноса может при этом быть записано в виде

$$d\varphi/dt=0, \quad (18)$$

где  $d/dt$  — производная вдоль поля  $v$ . Из уравнения (18) видно, что функция  $\varphi$  должна быть постоянной вдоль траекторий векторного поля  $v$  (это обстоятельство объясняет название «уравнения переноса»: амплитуда  $\varphi(x, t)$  функции (12)

переносится вдоль траекторий векторного поля  $v$ ).

Отметим, что, в отличие от двух ранее рассмотренных случаев, мы не получили точного решения задачи. Более того, правая часть уравнения (11) обращается в нуль с точностью до членов порядка  $O(h^2)$ . Чтобы получить дальнейшие члены асимптотического разложения, нужно искать функцию  $\varphi(x, t)$  в виде формального степенного ряда по переменной  $h$ :

$$\varphi(x, t) \equiv \sum_{l=0}^{\infty} h^l \varphi_l(x, t). \quad (19)$$

Как видно из формулы (15), для функции  $\varphi_0(x, t)$  мы снова получим уравнение переноса (18). Нетрудно показать, что функции  $\varphi_l(x, t)$  можно последовательно определять таким образом, чтобы правая часть в уравнении (11) имела порядок  $O(h^s)$  для любого целого  $s > 0$ , если в разложении (19) взять достаточно большую частичную сумму ряда.

Рассмотрим, например, уравнение для функции  $\varphi_1(x, t)$ . Выделяя в уравнение (15) члены порядка  $h^2$ , получим уравнение

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial P_n}{\partial p}(\lambda_1) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = -\frac{i}{2} \frac{\partial^2 P_n}{\partial p^2}(\lambda_1) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2},$$

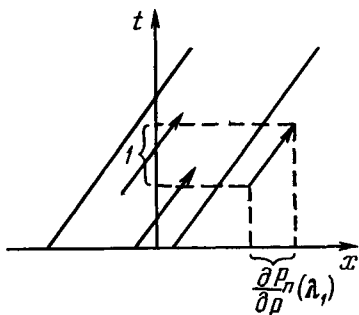


Рис. 1.

которое с учетом определения производной  $d/dt$  может быть записано в виде

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = -\frac{i}{2} \frac{\partial^2 P_n}{\partial p^2} (\lambda_1) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}. \quad (20)$$

Если определить функцию  $\varphi_0(x, t)$  из уравнения (18), уравнение (20) позволяет вычислить функцию  $\varphi_1(x, t)$  интегрированием вдоль траекторий векторного поля  $\mathbf{v}$ .

Рассмотрение членов уравнения (15), имеющих порядки  $\hbar^3$ ,  $\hbar^4$ , ..., позволяет получить рекуррентную систему для определения функций  $\varphi_i(x, t)$ , причем каждая следующая функция получается из предыдущих с помощью интегрирования вдоль траекторий векторного поля  $\mathbf{v}$ .

4. В качестве простейшего примера уравнения с переменными коэффициентами рассмотрим нестационарное уравнение для квантовомеханического осциллятора:

$$\left[ \hat{E} + \frac{1}{2} (x^2 + \hat{p}^2) \right] \psi(x, t) = 0, \quad \psi(x, 0) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \alpha x \right\} \varphi_0(x). \quad (21)$$

Поскольку коэффициенты в уравнении (21) не постоянны, то нет оснований предполагать, что функция  $S(x, t)$  будет зависеть линейно от  $x$  и  $t$ . Поэтому асимптотическое решение задачи (21) будем искать в виде

$$\psi(x, t) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(x, t) \right\} \varphi(x, t), \quad (22)$$

причем для простоты ограничимся нахождением только первого члена асимптотики по  $\hbar$ .

При подстановке функции (22) в задачу (21), как и ранее, имеем

$$\begin{aligned} & \left[ \hat{E} + \frac{1}{2} (x^2 + \hat{p}^2) \right] \psi(x, t) = \\ & = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(x, t) \right\} \left[ \left\{ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( x^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial x_1} \right)^2 \right) \right\} - \right. \\ & \quad \left. - i\hbar \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right] \right] \varphi(x, t) + O(\hbar^2) = 0, \\ & \psi(x, 0) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(x, 0) \right\} \varphi(x, 0) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \alpha x \right\} \varphi_0(x), \end{aligned} \quad (23)$$

откуда получаем уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( x^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right) = 0 \quad (24)$$

и уравнение относительно функции  $\varphi$ :

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \varphi = 0. \quad (25)$$

Начальные условия для уравнений (24) и (25) получаются из второго из соотношений (23):

$$S(x, 0) = \alpha x, \quad \varphi(x, 0) = \varphi_0(x).$$

Уравнение (24) Гамильтона — Якоби, как и ранее, является нелинейным уравнением в частных производных (не содержащим искомой функции  $S$ ). Однако, в отличие от уже рассмотренных случаев, это уравнение не допускает тривиального решения в виде линейной функции от  $x$ . Для решения этого уравнения воспользуемся методом характеристик. Запишем соответствующую систему Гамильтона обыкновенных дифференциальных уравнений, отвечающую гамильтониану  $H(x, p) = \frac{1}{2}(x^2 + p^2)$ :

$$\dot{x} = H_p = p, \quad \dot{p} = -H_x = -x \quad (26)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad p(0) = \frac{\partial S_0}{\partial x}(x_0) = \alpha = p_0^*). \quad (27)$$

Систему (26), (27) можно решить явно:

$$x(x_0, t) = x_0 \cos t + \alpha \sin t, \quad p(x_0, t) = \alpha \cos t - x_0 \sin t. \quad (28)$$

Из механики известно, что решение  $S(x, t)$  уравнения (24) может быть записано в виде

$$S(x, t) = S_0(x_0) + \int_0^t (p dx - H dt) \Big|_{x_0=x_0(x, t)}, \quad (29)$$

---

\*) Мы пользуемся здесь механическими аналогиями, подсказанными видом уравнения (24).

где интегрирование проводится вдоль траекторий системы (28), а  $x_0(x, t)$  — функция, определяемая первым из соотношений (28).

Мы дадим сейчас несколько другую интерпретацию соотношения (29). Рассмотрим множество точек  $(x, p)$ , заданных соотношениями (27), когда  $x_0$  пробегает прямую  $\mathbf{R}$ . Это множество точек есть подмногообразие  $L_0$  в плоскости  $(x, p)$  (прямая, параллельная оси  $Ox$ ). Будем рассматривать уравнения (28) как соотношения, определяющие эволюцию многообразия  $L_0$  во времени. Нетрудно видеть, что прямая  $L_0$  вращается вокруг начала координат с постоянной угловой скоростью, так что вектор  $x(x_0, t)$ ,  $p(x_0, t)$ , получается из вектора  $(x_0, p_0)$  с помощью ортогонального преобразования с матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Если изобразить траекторию движения прямой  $L_0$  в координатах  $(x, p, t)$ , то мы получим двумерную поверхность  $L$  в  $\mathbf{R}^3$  (винтовая поверхность; см. рис. 2).

Интерпретируем теперь формулу (29) в терминах поверхности  $L$ . Поскольку функции  $(x_0, t)$  являются

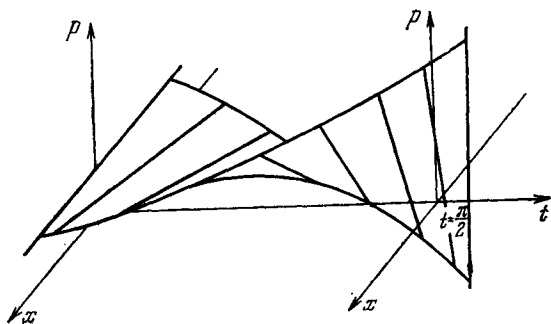


Рис. 2.

глобальными координатами на многообразии  $L$ , то существование решения  $x_0(x, t)$  первого из соотношений (28) означает, что мы рассматриваем ту часть поверхности  $L$ , которая диффеоморфно проецируется на плоскость

$(x, t)$ . Как видно из рис. 2, мы должны ограничиться при этом значениями переменной  $t$ , меньшими чем  $\pi/2$ . Таким образом, в отличие от рассмотренных ранее случаев, мы не получаем глобального решения уравнения (24).

Мы можем, однако, «поднять» решение  $S(x, t)$  уравнения (24) на поверхность  $L^*$ ). При этом функция  $S$  на поверхности  $L$  будет удовлетворять соотношению

$$dS = p dx - H dt. \quad (30)$$

Отметим особо, что решение уравнения (30) существует на поверхности  $L$  уже глобально, т. е. при всех  $t \geq 0$ .

Рассмотрим теперь уравнение (25). Для упрощения этого уравнения сделаем подстановку

$$\varphi(x, t) = \varphi_1(x, t) / \sqrt{\partial x / \partial x_0}.$$

Заметим, что уравнение (25) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \varphi = \\ &= \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \varphi = 0, \end{aligned}$$

где  $d/dt$  — производная вдоль траекторий системы Гамильтона (26), спроектированных на плоскость  $(x, t)$ . Далее имеем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial x_0} \right) = \frac{\partial}{\partial x_0} (\dot{x}) = \frac{\partial}{\partial x_0} (p) = \frac{\partial}{\partial x_0} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial x_0}.$$

Воспользовавшись последним соотношением, проведем требуемую подстановку

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\varphi_1}{\sqrt{\partial x / \partial x_0}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \frac{\varphi_1}{\sqrt{\partial x / \partial x_0}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\partial x / \partial x_0}} \frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\partial x / \partial x_0)^{3/2}} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \frac{\varphi_1}{\sqrt{\partial x / \partial x_0}} = \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial x_0} \right)^{-1/2} \frac{d\varphi_1}{dt}. \end{aligned}$$

Мы приходим, таким образом, к уравнению переноса

\*) Мы будем обозначать функцию  $S$ , «поднятую» на поверхность, той же самой буквой  $S$ .

относительно функции  $\varphi_1$ :

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \quad (31)$$

которое мы будем рассматривать как уравнение относительно поднятой на поверхность  $L$  функции  $\varphi_1$ . Производную  $d/dt$  можно рассматривать также как производную вдоль векторного поля

$$V(H) = p \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial t},$$

касающегося поверхности  $L$ . Однако, в отличие от уравнения (20), векторное поле лежит теперь на поверхности  $L$  в фазовом пространстве  $(x, p, t)$  (а не в пространстве  $(x, t)$ ). Отметим, что уравнение переноса в форме (31) имеет также глобальное решение на поверхности  $L$ .

Несмотря на существование на поверхности глобальных функций  $S, \varphi_1$ , мы не можем пока определить глобальное решение  $\psi$  уравнения (21), поскольку поверхность  $L$  при  $t = \pi/2$  перестает диффеоморфно проектироваться на пространство  $(x, t)$ . Однако этими функциями можно воспользоваться для построения глобального решения, если в окрестности точки  $t = \pi/2$  перейти к преобразованию Фурье в уравнении (21):

$$\psi(x, t) = (\bar{F}_{p \rightarrow x}^{1/h} \tilde{\psi})(x, t) = \left( \frac{-1}{2\pi i h} \right)^{1/2} \int \exp \left\{ \frac{i}{h} p x \right\} \tilde{\psi}(p, t) dp.$$

При этом уравнение (21) перейдет в уравнение

$$\left[ \hat{E} + \frac{1}{2} (\hat{x}^2 + p^2) \right] \tilde{\psi}(p, t) = 0,$$

где  $\hat{x} = i\hbar \partial/\partial p$ . Решение этого уравнения мы будем искать снова в виде, аналогичном (22):

$$\tilde{\psi}(p, t) = \exp \left\{ \frac{i}{h} \tilde{S}(p, t) \right\} \tilde{\varphi}(p, t)$$

в окрестности точки  $t = \pi/2$ . Для того чтобы получить решение, продолжающее решение  $\psi(x, t)$ , полученное ранее,

необходимо потребовать, чтобы при  $0 < \delta < t < \pi/2 - \delta$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\pi i h}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{\frac{i}{h}(S(x, t) - px)\right\} \varphi(x, t) dx = \\ = \exp\left\{\frac{i}{h}\tilde{S}(p, t)\right\} \tilde{\varphi}(p, t). \quad (32) \end{aligned}$$

Соотношение (32), вообще говоря, не может быть выполнено точно. Однако мы можем подобрать функции  $\tilde{S}$  и  $\tilde{\varphi}$  так, чтобы (32) было выполнено с точностью до членов порядка  $O(h)$ ; этого достаточно для получения первого члена асимптотики. Согласно известной формуле асимптотического разложения, нулевой член разложения интеграла, стоящего в левой части соотношения (32), равен

$$(-1)^{1/2} \exp\left\{\frac{i}{h}(S(x, t) - px)\right\} \varphi(x, t) \Big|_{x=x(p, t)} \frac{1}{\sqrt{-\frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x^2}}},$$

причем аргумент выражения, стоящего под знаком квадратного корня, выбирается равным 0 или  $-\pi$  в зависимости от знака этого выражения, а функция  $x(p, t)$  есть решение уравнения

$$p - \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (33)$$

относительно  $x$ .

Для совпадения правой и левой частей соотношения (32) с точностью до членов порядка  $O(h)$  нужно поэтому потребовать, чтобы

$$\begin{aligned} \tilde{S}(p, t) &= S(x, t) - px \Big|_{x=x(p, t)}, \\ \tilde{\varphi}(p, t) &= \frac{\varphi(x, t)}{\sqrt{\frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x^2}}} \Big|_{x=x(p, t)}. \end{aligned}$$

Поскольку на поверхности  $L$  имеет место равенство  $\partial S / \partial x = p$ , то решение уравнения (33) является функцией перехода от координат  $(p, t)$  к координатам  $(x, t)$  на

поверхности  $L$  при  $\delta < t < \pi/2 - \delta$ . При этом нужно положить  $S = S - px$  на поверхности  $L$ . Далее,

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi} &= \frac{\varphi}{\sqrt{\frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x^2}}} = \frac{\varphi_1}{\sqrt{\frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial x_0}}} = \\ &= \frac{\varphi_1}{\sqrt{\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_0}}} = \frac{\varphi_1}{\sqrt{\frac{\partial p}{\partial x_0}}}.\end{aligned}$$

При этом аргумент  $\arg \partial p / \partial x_0$  необходимо положить равным

$$\arg \frac{\partial p}{\partial x_0} = \arg \frac{\partial x}{\partial x_0} + \arg \left( -\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right) + \pi i \quad (34)$$

для каждого выбора аргумента функции  $-\partial^2 S / \partial x^2$ .

Таким образом, в окрестности точки  $\pi/2$  решение уравнения (21) представляется в виде преобразования Фурье от функции

$$\exp \left\{ \frac{i}{h} (S - xp) \right\} \frac{\varphi_1}{\sqrt{\partial p / \partial x_0}}.$$

5. Перейдем теперь к общему случаю. Для иллюстрации методов, применяемых нами, мы выбрали задачу Коши, поскольку решение последней наглядно и геометрично демонстрирует идеи и методы, применяемые в работе. На примере задачи Коши мы хотели бы начать изложение «с нуля» и построить канонический оператор непосредственно в процессе решения дифференциального уравнения.

Итак, рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned}-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + H(x, \hat{p}, t) \psi &= 0, \\ \psi|_{t=0} &= \exp \left\{ \frac{i}{h} S_0(x) \right\} \varphi_0(x).\end{aligned} \quad (35)$$

Здесь функция  $H(x, p, t)$  удовлетворяет оценке

$$|D_x^\alpha D_p^\beta H(x, p, t)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x| + |p|)^m$$



при каждом мультииндексе  $(\alpha, \beta)$ , а выражение  $H(x, \hat{p}, t)\psi(x)$  означает по определению следующее:

$$H(x, \hat{p}, t)\psi(x) = \{\bar{F}_{p \rightarrow y}^{1/h} [H(x, p, t) F_{x \rightarrow p}^{1/h} \varphi(x)]\}_{x=y},$$

где

$$F_{x \rightarrow p}^{1/h} \varphi = \left( \frac{-i}{2\pi h} \right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left\{ -i \frac{\langle p, x \rangle}{h} \right\} \varphi(x) dx,$$

а  $\bar{F}_{p \rightarrow x}^{1/h}$  — сопряженное преобразование. Таким образом, например,  $\hat{p} = -ih \partial/\partial x$ .

Мы будем искать асимптотические при  $h \rightarrow 0$  решения этой задачи в следующем смысле. Функции  $\psi(x, t, h)$  мы назовем *асимптотическим решением порядка  $r \geq 0$* , если при подстановке этой функции в левые части соотношений (35) мы получим величину порядка  $O(h^r)$ . При этом величина функции оценивается по норме некоторого функционального пространства (точные формулировки смотри в тексте). Для простоты мы будем искать асимптотику второго порядка. Схема решения задачи следующая. Ищем решение задачи (35) в виде

$$\psi(x, t, h) = \exp \left\{ \frac{i}{h} S(x, t) \right\} \varphi(x, t). \quad (36)$$

Подставляя выражение (36) в систему (35), имеем

$$\exp \left\{ \frac{i}{h} S(x, t) \right\} \left[ \frac{\partial S}{\partial t} - ih \frac{\partial}{\partial t} + H \left( x, \frac{\partial S}{\partial x} - ih \frac{\partial}{\partial x}, t \right) \right] \varphi(x, t) = O(h^2).$$

Учитывая, что  $\exp \left\{ \frac{i}{h} S(x, t) \right\} = O(1)$ , и разлагая полученное выражение по степеням  $h$ , получим с учетом (35)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left( x, \frac{\partial S}{\partial x}, t \right) = 0, \quad S|_{t=0} = S_0(x), \quad (37)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} \right] \varphi(x, t) = 0, \quad (38)$$

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0(x).$$

Здесь и ниже по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Для решения уравнения (37) применяем метод характеристик. Составляем систему Гамильтона в пространстве  $\mathbf{R}_x^n \oplus \mathbf{R}_{np} \oplus \mathbf{R}_t^1$ :

$$\dot{x} = H_p, \quad \dot{p} = -H_x, \quad x(0) = x_0, \quad p(0) = \frac{\partial S_0(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0}. \quad (39)$$

Пусть  $x(x_0, t)$ ,  $p(x_0, t)$  — решение системы Гамильтона. Тогда уравнения

$$x = x(x_0, t), \quad p = p(x_0, t),$$

$$x = (x^1, \dots, x^n), \quad p = (p_1, \dots, p_n), \quad x_0 \in \mathbf{R}^n, \quad t \in \mathbf{R}_+,$$

определяют многообразие  $L$  размерности  $n+1$  в пространстве  $\mathbf{R}_x^n \oplus \mathbf{R}_{np} \oplus \mathbf{R}_t^1$  с краем  $\{t=0\}$ . Доказывается, что на этом многообразии замкнута форма

$$p_i dx^i - H(x, p, t) dt = \omega.$$

Поскольку многообразие  $L$  односвязно, то форма  $\omega$  точна; кроме того, при  $t=0$  имеет место равенство

$$dS_0 = \frac{\partial S_0}{\partial x^i} \Big|_{x=x_0} dx^i = p_i dx^i.$$

Поэтому существует решение задачи

$$dS' = \omega|_L, \quad S'|_{t=0} = S_0(x).$$

Пусть теперь  $U$  — такая открытая окрестность в пространстве  $\mathbf{R}_x^n \oplus \mathbf{R}_t^1$  множества  $\{t=0\}$ , на которую однозначно проектируется многообразие  $L$ , т. е. разрешимы уравнения  $x = x(x_0, t)$  относительно  $x_0$ :  $x_0 = x_0(x, t)$ . Тогда функция

$$S(x, t) = S'(x_0, t)|_{x_0=x_0(x, t)} = (\pi_x^{-1})^* S'(x_0, t),$$

где  $\pi_x: L \rightarrow \mathbf{R}_x^n \oplus \mathbf{R}_t^1$  — проекция, является решением в  $U$  задачи (37).

Решение уравнения (38) в области  $U$  ищем с помощью подстановки

$$\varphi(x, t) = \varphi'(x_0, t) \left[ \frac{Dx}{Dx_0} \right]^{-1/2} \Big|_{x_0=x_0(x, t)}.$$

Поскольку функция  $J = Dx/Dx_0$  удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\frac{d}{dt}(\ln J) = \operatorname{div} V(H) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \right),$$

то для функции  $\varphi$ , заданной на многообразии  $L$ , нужно потребовать выполнения соотношений

$$\left[ \frac{d}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial p_i} \right] \Big|_L \varphi = 0, \quad \varphi|_{t=t_0} = \varphi_0(x), \quad (40)$$

где  $d/dt$  — ограничение векторного поля

$$\frac{\partial}{\partial t} + V(H) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \quad (41)$$

на многообразие  $L$ .

Из (39) следует, что  $d/dt$  есть производная вдоль траекторий системы Гамильтона (39). Заметим также, что из способа построения многообразия  $L$  следует, что оно инвариантно относительно векторного поля (41).

Можно доказать, что в окрестности тех точек многообразия  $L$ , для которых проекция  $\pi_x$  имеет особенность, существует такое множество индексов  $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ , что уравнения

$$x^i = x^i(x_0, t), \quad i \in I, \quad (42)$$

$$p_j = p_j(x_0, t), \quad j \in \bar{I} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus I,$$

разрешимы относительно  $x_0$ :

$$x_0 = x_0(x^I, p_{\bar{I}}, t).$$

В окрестности таких точек мы совершаем переход в уравнении к преобразованию Фурье по переменным  $x^{\bar{I}}$ :

$$\varphi(x, t, h) = \bar{F}^{1/h}_{p_{\bar{I}} \rightarrow x^{\bar{I}}} \bar{\Psi}_I(x^I, p_{\bar{I}}, t, h); \quad (43)$$

при этом для функции  $\psi_I$  получим уравнение

$$-ih \frac{\partial \psi_I}{\partial t} + H(x^I, \hat{x}^I, \hat{p}_I, p_I, t) \psi_I = O(h^2), \quad \hat{x}^I = ih \frac{\partial}{\partial p_I}.$$

Аналогично рассмотренному выше, ищем функцию  $\psi_I$  в виде

$$\psi_I(x^I, p_I, t, h) = \exp \left\{ \frac{i}{h} S_I(x^I, p_I, t) \right\} \left[ \frac{D(x^I, p_I)}{Dx_0} \right]^{-1/2} \varphi.$$

При этом доказывается, что в качестве функции  $S_I$  можно взять функцию

$$S_I(x^I, p_I, t) = (\pi_I^{-1})^* \{ S(x_0, t) - \bar{x}^I(x_0, t) p_I(x_0, t) \},$$

а функция  $\varphi$  на многообразии  $L$  должна удовлетворять уравнению (40). Здесь  $\pi_I: L \rightarrow \mathbf{R}_x^I \oplus \mathbf{R}_{p_I}^I \oplus \mathbf{R}_t^1$  — проекция,  $\pi_I^{-1}$  существует в рассматриваемой окрестности в силу существования решения системы (42).

Обозначим через  $U_I$  область на многообразии  $L$ , на которой отображение  $\pi_I$  невырождено. Чтобы формулы (36) и (43) определяли одно и то же решение (с точностью до  $h$ ) уравнения (35), необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ \frac{i}{h} S(x, t) \right\} \varphi(x, t) \left[ \frac{Dx}{Dx_0} \right]^{-1/2} = \\ & = \bar{F}^{1/h}_{p_I \rightarrow x^I} \left\{ \exp \left\{ \frac{i}{h} S_I(x^I, p_I, t) \right\} \left[ \frac{D(x^I, p_I)}{Dx_0} \right]^{-1/2} \varphi \right\} + O(h) \quad (44) \end{aligned}$$

в тех точках  $U_I$ , где проекция  $\pi_x$  невырождена. Оказывается, что (в односвязном случае) можно так подобрать

аргументы функций  $\frac{D(x^I, p_I)}{Dx_0}$  в каждой из окрестностей  $U_I$ , чтобы соотношение (44) было выполнено. Именно (ср. (34)),  $\arg \frac{D(x^I, p_I)}{Dx_0}$  и  $\arg \frac{D(x^J, p_J)}{Dx_0}$  в пересечении  $U_I \cap U_J$  должны быть связаны соотношением

$$\arg \frac{D(x^I, p_I)}{Dx_0} - \arg \frac{D(x^J, p_J)}{Dx_0} = \sum_k \arg \lambda_k + |J \setminus I| \pi,$$

где  $\{\lambda_k\}$  — собственные значения матрицы

$$\frac{\partial(-p_{I_2}, x^{I_3})}{\partial(x^{I_2}, p_{I_2})} = \text{Hess}_{x^{I_2}, p_{I_2}}(-S_I), \quad I_2 = I \setminus J, \quad I_3 = J \setminus I.$$

Более того, лагранжево многообразие  $L$  должно лежать на поверхности нулевых значений функции Гамильтона  $H(x, p)$ , т. е.  $H|_L \equiv 0$ . При этом гамильтоново векторное поле  $V(H)$  автоматически касается лагранжева многообразия  $L$ .

Пусть теперь  $L$  — произвольное лагранжево многообразие в фазовом пространстве  $\mathbf{R}_x^n \oplus \mathbf{R}_p^n$ , лежащее на поверхности нулевого уровня функции Гамильтона  $H(x, p)$ . Допустим сначала, что многообразие  $L$  взаимно однозначно проектируется на подпространство  $\mathbf{R}_x^n$ , т. е.  $x$ -координаты служат системой координат на многообразии  $L$ , а  $p$ -координаты являются функциями от координат  $x$ ,  $p = p(x)$ , на многообразии  $L$ . В этом случае асимптотическое решение (с точностью до  $O(h^2)$ ) строится по формуле

$$\psi(x) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S(x)\right\} \varphi(x),$$

где функция действия  $S(x)$  находится из уравнения  $dS(x) = p dx = p_1(x) dx^1 + \dots + p_n(x) dx^n$ , а функция  $\varphi(x)$  находится из уравнения переноса

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial p_i}\right) \varphi = 0,$$

где  $d/dt$  — производная вдоль гамильтонова векторного поля  $V(H)$ . Разумеется, указанных асимптотических решений много, и выбор подходящего решения зависит от начальных или граничных условий.

В общем случае мы не можем утверждать, что на лагранжевом многообразии  $L$   $x$ -координаты служат системой координат. Вообще, если многообразие  $L$  размерности  $n$  вложено в фазовое пространство  $\mathbf{R}_x^n \oplus \mathbf{R}_p^n$ , то самое большее мы можем указать локальную систему координат в окрестности каждой точки подмногообразия  $L$ . При этом в качестве локальной системы координат всегда можно взять некоторую группу координат объемлющего фазового пространства

$\mathbb{R}_x^n \oplus \mathbb{R}_p^n$ , скажем,  $(x^{i_1}, \dots, x^{i_k}, p_{i_{k+1}}, \dots, p_{i_n})$ . Если же при этом нам известно, что многообразие  $L$  является лагранжевым, то такую локальную систему координат  $(x^{i_1}, \dots, x^{i_k}, p_{i_{k+1}}, \dots, p_{i_n})$  можно выбрать так, чтобы номера  $(i_1, \dots, i_k)$  и  $(i_{k+1}, \dots, i_n)$  были дополнительными друг к другу, т. е. чтобы в качестве координат на лагранжевом многообразии не встречались координаты  $x^j$  и  $p_j$  с одинаковыми индексами.

Опустим на некоторое время требование, чтобы функция  $\varphi$  удовлетворяла уравнению переноса. Тогда, используя локальную систему координат  $(x^1, \dots, x^n)$  на лагранжевом многообразии  $L$ , можно было бы построить асимптотическое решение в том же виде

$$\psi(x) = e^{\frac{i}{h} S} \cdot \varphi,$$

считая, что  $S$  — функция на лагранжевом многообразии, удовлетворяющая уравнению  $dS = (p dx)/L$ , а  $\varphi$  — гладкая функция, носитель которой целиком лежит в области многообразия  $L$ , где определены координаты  $(x^1, \dots, x^n)$ . Если в некоторой окрестности лагранжевого многообразия  $L$  приходится брать координаты смешанного типа  $(x^{i_1}, \dots, x^{i_k}, p_{i_{k+1}}, \dots, p_{i_n}) = (x^I, p_{\bar{I}})$ ,  $I = (i_1, \dots, i_k)$ ,  $\bar{I} = (i_{k+1}, \dots, i_n)$ ,  $I \cap \bar{I} = \emptyset$ ,  $I \cup \bar{I} = \{1, 2, \dots, n\}$ , то в качестве асимптотического решения можно взять функцию

$$\psi(x) = F^{1/h}_{p_{\bar{I}} \rightarrow x^{\bar{I}}} \left[ \exp \left\{ \frac{i}{h} S \right\} \varphi \right], \quad (45)$$

где  $S$  — функция на лагранжевом многообразии, удовлетворяющая уравнению

$$dS = (p_I dx^I - x^{\bar{I}} dp_{\bar{I}}) \mid L,$$

а  $\varphi$  — гладкая функция с носителем, лежащим в данной окрестности. При этом считаем, что выражение, стоящее под знаком преобразования Фурье, является функцией от переменных  $(x^I, p_{\bar{I}})$  — координат на лагранжевом многообразии  $L$ .

Теперь мы можем организовать все указанные наблюдения следующим образом. Дано лагранжево многообразие  $L$ . Покроем многообразие  $L$  атласом карт  $U_i$ ,

причем в карте  $U_I$  зададим в качестве локальной системы координат координаты фазового пространства  $(x^I, p_I)$ . Выберем в каждой карте  $U_I$  две функции:  $S_I$ , удовлетворяющую уравнению

$$dS_I = (p_I dx^I - x^I dp_I) | L,$$

и  $\varphi_I$ , носитель которой лежит в карте. Построим по формулам (45) функции

$$\psi_I(x) = F_{p_I \rightarrow x^I}^{1/h} \left[ \exp \left\{ \frac{i}{h} S_I \right\} D_I \cdot \varphi_I \right]$$

как значения оператора  $K_{U_I}$  на функции  $\varphi_I$ :

$$\psi_I(x) = K_{U_I}(\varphi_I).$$

Здесь  $D_I$  — некоторые, пока произвольные, гладкие функции, заданные на каждой карте. Потребуем, чтобы операторы  $K_{U_I}$  были «согласованы» на пересечениях карт, т. е. если носитель функции  $\varphi$  лежит в пересечении карт  $U_I \cap U_J$ , то

$$K_{U_I}(\varphi) - K_{U_J}(\varphi) \equiv 0 \pmod{h^2}. \quad (46)$$

Условия согласования (46) с помощью метода стационарной фазы могут быть преобразованы в некоторые условия согласования функций действия  $S_I$  и функций  $D_I$ .

Оказывается, что для того, чтобы выполнялись соотношения, согласующие операторы  $K_{U_I}$  на различных картах, необходимо, чтобы функции  $S_I$  и  $D_I$  удовлетворяли следующим соотношениям:

$$S_I - S_J = x^J p_J - x^I p_I, \quad (47)$$

$$\frac{D_I}{D_J} = \left[ \frac{\partial(-p_{I_2}, x^{I_3})}{\partial(x^{I_2}, p_{I_2})} \right]^{1/2} \exp \left\{ \frac{i\pi}{2} |I_2| \right\}, \quad (48)$$

где  $I_2 = I \setminus J$ ,  $I_3 = J \setminus I$ .

Мы приходим к естественной задаче об уничтожении препятствий, задаваемых соотношениями (47), (48). Эти препятствия носят характер одномерных коциклов в тео-

рии когомологий лагранжева многообразия  $L$ . Эти два препятствия носят название «условий квантования» лагранжева многообразия  $L$  и зависят только от топологической структуры многообразия  $L$  и способа его вложения в фазовое пространство  $\mathbb{R}_x^n \oplus \mathbb{R}_p^n$ .

Если условия квантования выполнены на лагранжевом многообразии  $L$ , то операторы  $K_{U_I}$  «согласованы» на пересечениях карт. Значит, с помощью операторов  $K_{U_I}$  можно построить один оператор  $K$ , действующий уже на функциях  $\varphi$  на лагранжевом многообразии  $L$  с произвольным носителем, а с его помощью асимптотические решения искать в виде

$$\psi(x) = K(\varphi).$$

Доказательство всех изложенных фактов можно найти в книге В. П. Маслова [1]. (Заметим, однако, что терминология, принятая в этой книге, несколько отличается от нашей.)

Приведенные примеры нахождения асимптотического по малому параметру  $\hbar$  решения задачи Коши дифференциального (или псевдодифференциального) уравнения иллюстрируют общие закономерности метода нахождения решения. Прежде всего рассматриваются только такие дифференциальные (или псевдодифференциальные) операторы, которые являются однородными степени нуль по совокупности переменных  $(\hbar^{-1}, \partial/\partial x)$ . Класс таких операторов можно задавать с помощью функции Гамильтона  $H(x, p)$ , зависящей от двух групп переменных  $x = (x^1, \dots, x^n)$ ,  $p = (p_1, \dots, p_n)$ . Для того чтобы получить сам оператор  $H(x, \hat{p})$ , следует в случае полиномиальной по переменным  $p = (p_1, \dots, p_n)$  функции  $H$  просто произвести подстановку вместо переменных  $p_k$  операторов  $-i\hbar \partial/\partial x^k$ , считая операцию дифференцирования первой операцией, а операцию умножения на функции — коэффициенты полинома — второй операцией. В случае псевдодифференциальных операторов следует воспользоваться преобразованием Фурье по формуле

$$H(x, \hat{p})\psi(x) = \{\bar{F}_{p \rightarrow y}^{1/\hbar} [H(x, p) F_{x \rightarrow p}^{1/\hbar} \psi(x)]\}_{x=y}.$$

Последняя формула дает эквивалентное определение оператора в случае полиномиальной функции Гамильтона  $H(x, p)$  по переменным  $p$ .



Тогда всякое асимптотическое решение уравнения  $H(x, \hat{p})\psi(x) = 0$  связывается с некоторым подмногообразием  $L$ , лежащим в фазовом пространстве  $\mathbf{R}_x^n \oplus \mathbf{R}_p^n$ . Фазовое пространство  $\mathbf{R}_x^n \oplus \mathbf{R}_p^n$  имеет координаты  $(x, p) = (x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$ , а размерность подмногообразия  $L$  равна  $n$ , т. е. половине размерности фазового пространства. При этом подмногообразие  $L$  не может быть произвольным, но таким, что 2-форма

$$\omega = dp \wedge dx = dp_1 \wedge dx^1 + dp_2 \wedge dx^2 + \dots + dp_n \wedge dx^n$$

равна тождественно нулю при ограничении ее на подмногообразии  $L$ . Такие подмногообразия  $L$  называются *лагранжевыми многообразиями*. Оператор  $K$  носит название *канонического оператора*.

Таким образом, задача построения асимптотического решения по заданному лагранжеву многообразию  $L$  распадается на две задачи: а) топологическую задачу вычисления условий квантования лагранжева многообразия и задачу б) нахождения функции  $\psi$  на лагранжевом многообразии, удовлетворяющей уравнению переноса и построения решения в виде значения канонического оператора  $\psi(x) = K(\varphi)$ .

В соответствии с указанными двумя задачами мы в первой части излагаем топологические свойства лагранжевых многообразий и способы вычисления условий квантования. Во второй части излагаются все аналитические вопросы: построение канонического оператора, формулы взаимодействия канонического оператора с псевдодифференциальными операторами и приложения к различным задачам теории уравнений в частных производных.

# ТОПОЛОГИЯ ЛАГРАНЖЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

## НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТОПОЛОГИИ

В этой главе собран набор понятий и теорем из топологии и геометрии, встречающихся в книге. Весь материал настоящей главы можно разбить на две группы. К первой группе относятся понятия и теоремы, которые встречаются в большинстве рассуждений и конструкций. Ко второй группе относятся такие понятия и теоремы, которые носят чисто вспомогательный вычислительный характер. Хотя мы считаем, что эти понятия и теоремы хорошо известны читателю, но тем не менее мы подробно их излагаем по двум причинам. Первая причина состоит в стремлении сделать изложение как можно менее зависящим от дополнительной литературы, вторая — в том, что все изложение материала основано на максимальной эксплуатации «топологического способа рассуждения», позволяющего сделать проблему построения асимптотик решений уравнений с малым параметром в целом наиболее прозрачной. Подробное изложение можно найти в книгах Л. С. Понтрягина [2], Н. Стинрода [1], Д. Б. Фукса, А. Т. Фоменко, В. Л. Гутенмахера [1].

### § 1.1. Многообразие и расслоения

Основным геометрическим объектом, с которым мы будем работать на протяжении всего изложения, является гладкое многообразие. Пусть  $M$  — отделимое топологическое пространство со счетной базой открытых множеств. Пространство  $M$  называется *гладким* класса  $C^\infty$  *многообразием размерности  $n$* , если существует покрытие пространства  $M$  открытыми множествами  $U_1, U_2, \dots$ , удовлетворяющее следующим условиям:

(1) для любого множества  $U_i$  существует гомеоморфизм  $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$ , где  $V_i$  — открытая область в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ ;

(2) если  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , то гомеоморфизм  $\varphi_j = \varphi_j \varphi_i^{-1}$  множества  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  на множество  $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ , полученный композицией отображений  $\varphi_i^{-1}$  и  $\varphi_j$ , является  $C^\infty$ -гладким отображением областей евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ .

Если  $y$  — точка многообразия  $M$ ,  $y \in U_k$ , то координаты точки  $\varphi_k(y) \in \mathbb{R}^n$  называются *локальными координатами* точки  $y \in M$ . Пара  $(U_k, \varphi_k)$  называется *локальной картой* многообразия  $M$ , а набор карт  $\{(U_k, \varphi_k)\}$  называется *атласом локальных карт* многообразия  $M$ . Таким образом, в каждой локальной карте  $(U_k, \varphi_k)$  координаты точки  $\varphi_k(y)$ ,  $y \in M$ , определяют некоторые (непрерывные) функции  $\alpha_k(y), \dots, \alpha^n(y)$  в открытом множестве  $U_k$ , которые называются *локальной системой координат* многообразия  $M$  в карте  $(U_k, \varphi_k)$ . В дальнейшем, для простоты, мы будем локальную карту  $(U_k, \varphi_k)$  обозначать через  $U_k$ , считая, что на ней фиксировано отображение  $\varphi_k$ . На пересечении  $U_k \cap U_j$  двух карт  $U_k, U_j$  заданы две локальные системы координат  $\{\alpha(y)\}$  и  $\{\alpha_j^i(y)\}$ , причем согласно определению найдется такое гладкое класса  $C^\infty$  отображение области евклидова пространства  $\varphi_{kj}$ , т. е.  $n$  гладких функций от  $n$  переменных, что

$$\{\alpha_j^i(y)\} = \varphi_{kj}(\alpha_k^1(y), \dots, \alpha_k^n(y)).$$

Два атласа локальных карт  $\{U_k, \varphi_k\}$  и  $\{U_s', \varphi_s'\}$  на многообразии  $M$  называются *эквивалентными*, если в пересечении  $U_k \cap U_s'$  локальная система координат  $\{\alpha^k(y)\}$  карты  $U_k$  и локальная система координат  $\{\alpha_s'^i(y)\}$  карты  $U_s'$  связаны тождеством

$$\alpha_k^i(y) \equiv \psi_{ks}^i(\alpha_s'^1(y), \dots, \alpha_s'^n(y))$$

для некоторых гладких функций  $\psi_{ks}^i$ . При этом говорят, что переход от одной локальной системы координат к другой осуществляется с помощью гладкой замены координат. Условие эквивалентности двух атласов локальных карт является отношением эквивалентности. Семейство всех попарно эквивалентных атласов локальных карт на

многообразии  $M$  будет называться гладкой структурой на многообразии  $M$ .

Функция  $f$  на многообразии  $M$  называется *гладкой функцией* класса  $C^\infty$ , если функции

$$f \circ \varphi_k^{-1}: V_k \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad V_k = \varphi_k(U_k) \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.1')$$

являются гладкими функциями на области  $V_k \subset \mathbb{R}^n$ . Определение гладкой функции  $f$  не зависит от выбора атласа локальных карт данной гладкой структуры на многообразии  $M$ .

В самом деле, если  $\{U'_s, \varphi'_s\}$  — другой атлас локальных карт, то функции  $f \circ \varphi'^{-1}_s: V'_s \rightarrow \mathbb{R}^1$  в окрестности каждой точки области  $V'_s$  разлагаются в композиции вида

$$f \circ \varphi'^{-1}_s = (f \circ \varphi_k^{-1}) \circ (\varphi_k \circ \varphi'^{-1}_s),$$

причем отображения  $f \circ \varphi_k^{-1}$  и  $\varphi_k \circ \varphi'^{-1}_s$  являются гладкими отображениями. Значит, и функция  $f \circ \varphi'^{-1}_s$  тоже является гладкой функцией.

Используя композицию (1.1), мы получаем, что всякая гладкая функция  $f$  на многообразии  $M$  может быть представлена в виде

$$f(y) = g_k(a'^1_k(y), \dots, a'^n_k(y)),$$

где  $g_k$  — гладкая функция от  $n$  переменных.

Покрывая многообразие  $M$  более мелкими локальными картами, можно всегда выбрать такой атлас карт  $(U_k, \varphi_k)$ , что  $V_k \cong \mathbb{R}^n$  для любого  $k$ . Более того, можно добиться (что менее тривиально) того, чтобы любое пересечение  $U_{i_1 \dots i_s} = U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_s}$  тоже было гомеоморфно евклидову пространству.

Рассматривают также более широкий класс объектов — гладкие многообразия с краем. В отличие от многообразий с краем, многообразия без края будем называть *замкнутыми многообразиями*. *Гладкое многообразие с краем* — это отделимое топологическое пространство  $M$  с подпространством  $N$  и счетным открытым покрытием  $U_1, U_2, \dots$  с гомеоморфизмами

$$\varphi_j: U_j \rightarrow V_j \subset \mathbb{R}^n,$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

(1) если множество  $U_i$  данного покрытия содержится в  $M \setminus N$ , то соответствующий гомеоморфизм  $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$  отображает множество  $U_i$  на открытый шар  $V_i$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ ; в противном случае задан гомеоморфизм  $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$ , где  $V_i$  — полушарие вида

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 < 1, \quad x_n \geq 0,$$

причем множество  $U_i \cap N$  отображается на подмножество в  $V_i$ , состоящее из точек, для которых  $x_n = 0$ ;

(2) если  $U_i$  и  $U_j$  — два множества из данного покрытия и  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , то отображение  $\varphi_i \varphi_j^{-1} = \varphi_{ij}$  является гладким отображением множества  $\varphi_j(U_i \cap U_j)$  на множество  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ .

Поскольку гомеоморфизмы  $\varphi_{ij}$  должны переводить внутренние точки во внутренние, а граничные — в граничные, очевидно, что если ограничить на множество  $N$  те элементы покрытия  $U_i$ , которые его пересекают, то множества  $U_i \cap N$  образуют покрытие множества  $N$ , определяющее на нем структуру гладкого многообразия; оно называется *краем многообразия  $M$*  и обозначается через  $\partial M$ . Поскольку понятие гладкой функции имеет смысл и в том случае, когда функция определена только в полупространстве  $\mathbb{R}^n$ , то для многообразий с краем определяются гладкие замены локальных координат и гладкая структура на многообразии с краем.

Для гладких многообразий справедливо следующее утверждение.

**Предложение 1.1.** Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $\{W_k\}$  — некоторое покрытие открытыми множествами, т. е.  $\bigcup W_k = M$ . Тогда существуют такие вещественные гладкие функции  $\varphi_k$  на многообразии  $M$ , что

а)  $0 \leq \varphi_k(y) \leq 1, \quad y \in M;$

б)  $\text{supp } \varphi_k \subset W_k;$

в)  $\sum_k \varphi_k(y) \equiv 1.$

Набор функций  $\{\varphi_k\}$  называется *разбиением единицы*, подчиненным покрытию  $\{W_k\}$ .

Пример разбиения единицы приведен на следующем рис. 3.

Разбиения единицы полезны для разложения любой функции  $f$  в сумму таких слагаемых,  $f = \sum_i f_i$ , чтобы каждое слагаемое  $f_i$  имело достаточно малый носитель. Для этого достаточно положить  $f_i = \varphi_i f$ . Совершенно таким же способом можно разлагать в сумму слагаемых с малыми носителями и другие объекты — вектор-функции, векторные поля, дифференциальные формы и т. п.

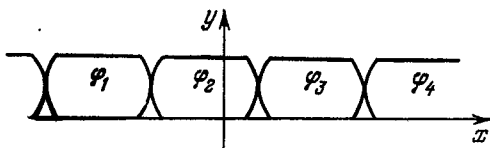


Рис. 3.

Простейшим примером гладкого многообразия является евклидово пространство  $\mathbf{R}^n$ . В этом случае атлас карт состоит из одной карты  $U$ , совпадающей с самим пространством  $\mathbf{R}^n$ , а локальная система координат в этом случае есть линейная система координат евклидова пространства  $\mathbf{R}^n$  и, следовательно, является *глобальной* системой координат на многообразии  $\mathbf{R}^n$ .

Одномерных замкнутых многообразий существует всего два: вещественная прямая  $\mathbf{R}^1$  и окружность  $S^1$ . На окружности  $S^1$  не существует глобальной системы координат. Локальные же системы координат в окрестности каждой точки  $x \in S^1$  определяются с помощью одного углового параметра  $\varphi$ , который на всей окружности является многозначной функцией, значение которой определяется точкой  $x \in S^1$  с точностью до слагаемого, кратного  $2\pi$ .

Двумерных замкнутых многообразий — поверхностей — уже существует бесконечно много. Простейшей поверхностью среди двумерных многообразий (исключая евклидово пространство  $\mathbf{R}^2$ ) является двумерная сфера  $S^2$ , которую можно задавать с помощью уравнения  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  в трехмерном евклидовом пространстве. На двумерной сфере нельзя задать глобальную систему координат. Атлас карт должен состоять по крайней мере из двух карт. Но проще всего задать атлас из шести карт

с помощью неравенств  $x > 0$ ,  $x < 0$ ,  $y > 0$ ,  $y < 0$ ,  $z > 0$ ,  $z < 0$ . В каждой из этих шести карт две евклидовы координаты, не входящие в неравенство, служат локальной системой координат. Например, в карте  $x > 0$  имеем  $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$ , а в карте  $x < 0$  получаем  $x = -\sqrt{1 - y^2 - z^2}$ , что дает доказательство гомеоморфизма этих карт на область в  $\mathbb{R}^2$ , задаваемую неравенством  $y^2 + z^2 < 1$ . Легко проверить, что функции перехода от одной локальной системы координат к другой являются гладкими. Так, например, если в карте  $x > 0$  в качестве координат взять координаты  $(y, z)$ , а в карте  $y > 0$  взять координаты  $(x, z)$ , то функции перехода примут вид

$$y = \sqrt{1 - x^2 - z^2},$$

$$z = z,$$

и, значит, являются гладкими функциями при  $x^2 + z^2 < 1$ .

Другим важным примером поверхности служит двумерный тор  $T^2$ , который можно определить как декартово произведение двух экземпляров окружности,  $T^2 = S^1 \times S^1$ , или как двумерную плоскость  $\mathbb{R}^2$ , в которой точки отождествлены с помощью целочисленной решетки  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$ . На торе имеются два *многозначных* параметра  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , превращающихся в *однозначные* локальные координаты в достаточно малой окрестности каждой точки  $x \in T^2$ .

Вообще, многие поверхности можно получать аналогично тору, отождествляя точки в  $\mathbb{R}^2$  с помощью действия некоторой дискретной группы на плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

Существует несколько способов задания многообразия. Простейший из них задает гладкое многообразие в виде *графика* некоторой *гладкой функции* или *вектор-функции*. Пусть  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — гладкая вектор-функция,  $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$  — ее график, т. е. множество точек вида  $(x, f(x))$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(x) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$ . Совершенно очевидно, что множество  $M$  является гладким многообразием. Для этого в качестве единственной карты выберем само множество  $M$ , а гомеоморфизм  $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  определим как ограничение проекции евклидова пространства  $\mathbb{R}^{n+m}$  на его первое слагаемое  $\mathbb{R}^n$ .

Другим распространенным способом задания многообразия в виде подмножества в евклидовом пространстве

$\mathbb{R}^n$  является *параметрический способ*. Пусть  $G \subset \mathbb{R}^k$  — открытое множество,  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  — гладкое отображение, являющееся гомеоморфизмом на свой образ  $M = f(G)$ . Тогда множество  $M$  является гладким многообразием. Обычно таким способом задают кривые и двумерные поверхности в трехмерном пространстве. Случай графика вектор-функции является частным случаем параметрического задания многообразия.

Параметрический способ задания многообразий позволяет нам рассматривать только простейшие многообразия, гомеоморфные области в евклидовом пространстве. Уже такие простые многообразия, как окружность  $S^1$  или сфера  $S^2$ , невозможно задать параметрически. В общем случае многообразия задают с помощью уравнения или системы уравнений в евклидовом пространстве:

$$f_1(x^1, \dots, x^n) = 0,$$

$$f_k(x^1, \dots, x^n) = 0.$$

С помощью одного уравнения  $(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 - 1 = 0$  задается сфера  $S^{n-1}$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Двумерный тор  $T = S^1 \times S^1$  можно задать с помощью системы двух уравнений в  $\mathbb{R}^4$ :

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0,$$

$$(x^3)^2 + (x^4)^2 - 1 = 0.$$

Однако не всякая система уравнений определяет многообразие. Например, уравнение  $xy = a$  задает одномерное многообразие при  $a \neq 0$  в двумерном пространстве. При  $a = 0$  решения уравнения  $xy = 0$  образуют координатный крест, не являющийся многообразием. Поэтому обычно на систему уравнений налагается требование, чтобы в каждой точке  $(x_0^1, \dots, x_0^n)$  решения системы выполнялись условия теоремы о неявных функциях: детерминант матрицы частных производных функций  $f_1, \dots, f_k$  по переменным  $x^{i_1}, \dots, x^{i_k}$  отличен от нуля:

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^{i_1}} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x^{i_1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x^{i_k}} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x^{i_k}} \end{vmatrix} \neq 0.$$



Согласно теореме о неявных функциях систему уравнений можно однозначно разрешить в окрестности точки  $(x_0^1, \dots, x_0^n)$  относительно переменных  $(x^{i_1}, \dots, x^{i_k})$ . Это значит, что множество решений системы уравнений в окрестности точки  $(x_0^1, \dots, x_0^n)$  можно задать в виде графика вектор-функций

$$\begin{aligned} x^{i_1} &= x^{i_1}(x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}), \\ &\vdots \\ x^{i_k} &= x^{i_k}(x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_n}), \end{aligned}$$

т. е. множество решений системы уравнений является гладким многообразием. Поскольку выбор координат  $(x^{i_1}, \dots, x^{i_k})$ , относительно которых разрешается система уравнений, несуществен, то удобнее условие теоремы о неявных функциях сформулировать в терминах ранга матрицы Якоби всех частных производных функций  $f_1, \dots, f_k$ :

$$\text{rang} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x^n} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x^n} \end{vmatrix} = k.$$

В следующем параграфе это условие, а также и сама теорема о неявных функциях, будет сформулировано в инвариантных терминах и в более общей ситуации.

В качестве примера снова рассмотрим уравнение сферы  $(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 - 1 = 0$ . Матрица частных производных в данном случае имеет вид

$$\|2x^1, \dots, 2x^n\|.$$

Ранг этой матрицы может равняться нулю или единице. Если ранг равен нулю, то  $2x^1 = \dots = 2x^n = 0$ . Поскольку точка  $x^1 = \dots = x^n = 0$  не является решением уравнения сферы, то во всех точках сферы ранг матрицы Якоби уравнения равен единице. Следовательно, по теореме о неявных функциях сфера является гладким многообразием.

Многие классические пространства являются гладкими многообразиями. Важнейшими среди них являются матричные группы и их однородные пространства. Рассмотрим сначала группу  $GL(n, \mathbb{R})$  всех невырожденных квадратных матриц порядка  $n$ . Каждый элемент  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  является матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0.$$

Таким образом, мы можем считать, что группа  $GL(n, \mathbb{R})$  является подмножеством в линейном пространстве  $\mathbb{R}^{n^2}$  размерности  $n^2$  (по числу элементов  $a_{ij}$ , входящих в матрицу  $A$ ). Поскольку матрица  $A$  принадлежит группе  $GL(n, \mathbb{R})$ , если  $\det A \neq 0$ , то множество  $GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$  является открытым множеством. Следовательно, группа  $GL(n, \mathbb{R})$  является гладким многообразием, атлас карт в котором состоит из одной карты.

Через  $SL(n, \mathbb{R})$  обозначается подгруппа группы  $GL(n, \mathbb{R})$ , состоящая из матриц  $A$ , детерминант которых равен единице:

$$\det A = 1.$$

Таким образом, группа  $SL(n, \mathbb{R})$  определяется как множество решений одного уравнения  $\det A - 1 = 0$ . Функция  $f(A) = \det A - 1$  является многочленом от переменных  $\{a_{ij}\}$ . Для того чтобы установить, что группа  $SL(n, \mathbb{R})$  является многообразием, достаточно установить, что на группе  $SL(n, \mathbb{R})$  градиент функции  $f(A)$  отличен от нуля. Вычислим сначала градиент функции  $f(A)$  в точке  $A = E$ , равной единичной матрице. Обозначим через  $A_{ij}$  матрицу, полученную из матрицы  $A$  путем вычеркивания строки с номером  $i$  и столбца с номером  $j$ . Тогда

$$f(A) = \det A - 1 = \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} a_{1k} \det A_{1k} - 1.$$

Поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial a_{11}} = \det A_{11} = 1, \quad \text{если } A = E.$$

Таким образом, градиент функции  $f(A)$  отличен от нуля в точке  $A=E$ . Пусть теперь  $A_0 \in SL(n, \mathbb{R})$  — произвольная матрица. Рассмотрим отображение  $\varphi: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ , задаваемое формулой

$$\varphi(A) = A_0^{-1}A.$$

Отображение  $\varphi$  является гладким гомеоморфизмом. Тогда композиция  $h(A) = f(\varphi(A))$  является гладкой функцией, причем  $h(A) = \det(A_0^{-1}A) = 1 = f(A)$ . Следовательно,  $\frac{\partial h}{\partial a_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial a_{ij}}$ . С другой стороны,

$$\frac{\partial h}{\partial a_{ij}}(A) = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial f}{\partial a_{\alpha\beta}}(\varphi(A)) \cdot \frac{\partial \varphi_{\alpha\beta}(A)}{\partial a_{ij}}.$$

В частности,

$$\frac{\partial h}{\partial a_{ij}}(A_0) = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial f}{\partial a_{\alpha\beta}}(E) \cdot \frac{\partial \varphi_{\alpha\beta}(A_0)}{\partial a_{ij}}.$$

Поскольку  $\varphi$  является гладким гомеоморфизмом, то матрица Якоби порядка  $n^2$ , составленная из частных производных  $\left\| \frac{\partial \varphi_{\alpha\beta}(A_0)}{\partial a_{ij}} \right\|$ , является невырожденной. Поэтому

из нетривиальности градиента функции  $f$  в точке  $E$  следует нетривиальность градиента функции  $f$  в точке  $A_0$ . Мы показали, что градиент функции  $f$  отличен от нуля в каждой точке группы  $SL(n, \mathbb{R})$ . Значит, по теореме о неявной функции группа  $SL(n, \mathbb{R})$  является гладким многообразием.

Перейдем теперь к менее тривиальному примеру — группе  $O(n)$  ортогональных матриц, т. е. матриц  $A$ , удовлетворяющих матричному соотношению  $A^t A = E$ . Здесь  $A^t$  обозначает транспонированную матрицу. Соотношение на ортогональные матрицы можно понимать как систему уравнений на пространстве  $\mathbb{R}^{n^2}$ , состоящую из  $n^2$  уравнений. Непосредственно в данной системе применить теорему о неявных функциях нам не удастся, поскольку в случае ее применимости мы получили бы, что множество решений образует нульмерное многообразие, что неверно. Это означает на самом деле, что в системе уравнений  $A^t A = E$  имеются зависимые уравнения. Поэтому вначале

следует выделить максимальную независимую подсистему уравнений, а для последней проверить условия теоремы о неявных функциях.

Нам такой способ представляется громоздким и не проясняющим суть дела. Поэтому мы рассмотрим другой способ, построив в явном виде специальный атлас карт в группе  $O(n)$ . Начнем, прежде всего, с построения специального атласа карт на группе  $GL(n, \mathbb{R})$ . Рассмотрим отображение

$$\exp: \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow GL(n, \mathbb{R}),$$

задаваемое формулой

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k.$$

Отображение  $\exp$  является гладким отображением, причем, если матрицы  $X$  и  $Y$  коммутируют, т. е.  $XY = YX$ , то

$$\exp(X + Y) = \exp(X) \exp(Y).$$

При этом нулевая матрица  $0$  отображается в единичную матрицу  $E$ :  $\exp(0) = E$ . Вычислим детерминант матрицы Якоби отображения  $\exp$  в точке  $0$ . Если  $Y = \exp(X)$ ,  $Y = \|y_{ij}\|$ ,  $X = \|x_{ij}\|$ , то

$$\frac{\partial y_{ij}}{\partial x_{\alpha\beta}} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j) = (\alpha, \beta), \\ 0, & \text{если } (i, j) \neq (\alpha, \beta), \end{cases}$$

в точке  $X = 0$ . Следовательно, детерминант матрицы Якоби отображения  $\exp$  равен единице. Применяя теорему о неявных функциях к системе уравнений  $Y = \exp(X)$ , получаем, что отображение  $\exp$  является гладким гомеоморфизмом в некоторой малой окрестности  $U$  нулевой матрицы. Обозначим через  $V_E = \exp(U)$ . Обратное к  $\exp$  отображение области  $V_E$  в область  $U$  обозначим через  $\ln$ :

$$\ln(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (A - E)^k, \quad A \in V_E.$$

Если матрицы  $A$  и  $B$  коммутируют, то  $\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B)$ .

Определим на группе  $GL(n, \mathbb{R})$  атлас карт  $\{V_A\}$ , положив  $V_A = A \cdot V_E$ ,  $\varphi_A: V_A \rightarrow U$ ,  $\varphi_A(B) = \ln(A^{-1}B)$ . Отобра-

жения  $\varphi_A$  являются гладкими гомеоморфизмами. Следовательно, функции перехода  $\varphi_B \varphi_A^{-1}$  тоже являются гладкими гомеоморфизмами.

Теперь с помощью атласа карт  $\{V_A\}$  построим атлас карт на группе  $O(n)$ . Пусть  $P \subset \mathbb{R}^{n^2}$  — подпространство кососимметрических матриц в пространстве всех матриц порядка  $n^2$ . Тогда, очевидно, матрица  $\exp(X)$ ,  $X \in P$ , является ортогональной матрицей. И, обратно, если  $A \in O(n) \cap V_E$ , то  $\ln A$  — кососимметрическая матрица. Следовательно, область  $U \cap P \subset P$  гомеоморфно отображается на открытое множество  $O(n) \cap V_E \subset O(n)$ . Положим

$$W_A = O(n) \cap V_A,$$

$$\varphi_A: W_A \rightarrow O(n) \cap P, \quad \varphi_A(B) = \exp(A^{-1}B) = \varphi_A(B).$$

Мы получаем атлас карт  $\{W_A\}$  на группе  $O(n)$ , причем функции перехода  $\varphi_B \varphi_A^{-1}$  являются гладкими отображениями.

Аналогичным способом можно построить атласы карт и для других классических матричных групп:  $GL(n, \mathbb{C})$ ,  $SL(n, \mathbb{C})$ ,  $U(n)$  и т. д. Используя экспоненциальное отображение, для каждой матричной группы строится свое подпространство в пространстве всех матриц. Так, для группы  $SL(n, \mathbb{C})$  соответствующее подпространство состоит из всех матриц, след которых равен нулю. Для группы  $U(n)$  соответствующее подпространство состоит из всех косозермитовых комплексных матриц.

Покажем теперь, что однородные пространства левых (правых) классов смежности по некоторой подгруппе тоже являются гладкими многообразиями. Пусть  $H \subset GL(n, \mathbb{R})$  — замкнутая подгруппа. Можно доказать, что тогда существует линейное подпространство  $P \subset \mathbb{R}^{n^2}$ , окрестность нуля которого  $P \cap U$  с помощью экспоненциального отображения  $\exp$  диффеоморфно отображается на окрестность единичного элемента подгруппы  $H$ :

$$\exp: P \cap U \rightarrow H \cap V_E.$$

В примерах подгрупп, рассмотренных далее, существование такого подпространства показывается без труда в явном виде. Так, например, для случая подгрупп  $SL(n, \mathbb{R})$ ,  $O(n)$ ,  $U(n)$  такие подпространства  $P$  мы уже указали выше. Таким образом, окрестность единичного

элемента  $E$ , точнее, класса смежности  $[E]=H$ , однородного пространства  $GL(n, \mathbf{R})/H$  гомеоморфна  $(V_E \cdot H)/H$ . Следовательно, можно ожидать, что пространство  $(V_E \cdot H)/H$  с помощью отображения  $\ln$  гомеоморфно отображается на окрестность нуля фактор-пространства  $\mathbf{R}^{n^2}/P$ . Более точно, пусть  $Q \subset \mathbf{R}^{n^2}$  — алгебраическое дополнение к подпространству  $P$ ,  $\mathbf{R}^{n^2} = Q \oplus P$ . Рассмотрим композицию

$$\psi: Q \cap U \xrightarrow{\exp} V_E \cdot H \rightarrow (V_E \cdot H)/H.$$

Нетрудно убедиться, что отображение  $\psi$  является гомеоморфизмом, поскольку классы смежности  $A \cdot H$  по подгруппе  $H$  пересекаются с образом  $\exp(Q \cap U)$  ровно по одной точке. Таким образом, мы построили одну карту  $W_E = (V_E \cdot H)/H$ ,  $\varphi_E: W_E \rightarrow Q \cap U$ ,  $\varphi_E = \psi^{-1}$ . Для построения всего атласа карт  $\{W_A\}$  заметим, что группа  $GL(n, \mathbf{R})$  действует на однородном пространстве  $GL(n, \mathbf{R})/H$  и переводит точку  $[E]$  в любую другую точку. Следовательно, положив  $W_A = A \cdot W_E$ ,  $\varphi_A(x) = \varphi_E(A^{-1}x)$ , мы получим полный атлас карт на однородном пространстве  $GL(n, \mathbf{R})/H$ .

Точно таким же образом доказывается, что и для любых замкнутых подгрупп  $GL(n, \mathbf{R}) \supset G \supset H$  однородное пространство  $G/H$  является гладким многообразием. Уже начиная с размерности три, множество многообразий настолько обширно, что оно не поддается какому-либо эффективному описанию, и мы вынуждены ограничиться только некоторыми классическими примерами многообразий.

Классические примеры однородных пространств имеют специальные названия. Так, пространство прямых евклидова пространства  $\mathbf{R}^{n+1}$ , проходящих через начало координат, называется вещественным  $n$ -мерным проективным пространством и обозначается через  $\mathbf{RP}_n$ . Его можно представить как однородное пространство классов смежности группы  $O(n)$  по подгруппе  $O(1) \times O(n-1)$ :  $\mathbf{RP}_n = O(n)/(O(1) \times O(n-1))$ . Важное значение в различных геометрических исследованиях имеют пространства  $G_{n,k}$   $k$ -мерных подпространств в евклидовом пространстве  $\mathbf{R}^{n+k}$ . Это пространство тоже является многообразием, гомеоморфным  $O(n+k)/(O(n) \times O(k))$ , и называется многообразием Грассмана или грассманианом.

По аналогии со схемой определения гладких многообразий определяются другие топологические объекты, имеющие название *расслоений*. Пусть заданы топологические пространства  $E, B, F$  и непрерывное отображение

$$p: E \rightarrow B,$$

удовлетворяющее следующему условию: существуют покрытие  $\{U_\alpha\}$  пространства  $B$  и система гомеоморфизмов

$$\varphi_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F,$$

причем следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & U_\alpha \times F \\ & \searrow \rho \quad \swarrow \pi & \\ & U_\alpha & \end{array}$$

т. е. справедливо равенство

$$p = \pi \circ \varphi_\alpha,$$

где  $\pi$  — проекция на первый сомножитель. Если обозначить, как и ранее,  $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ , то отображения

$$\varphi_{\alpha\beta} = (\varphi_\beta|_{p^{-1}(U_{\alpha\beta})}) \circ (\varphi_\alpha|_{p^{-1}(U_{\alpha\beta})})^{-1}, \quad (1.2)$$

$$\varphi_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \times F \rightarrow U_{\alpha\beta} \times F$$

являются гомеоморфизмами, тождественными по первой координате.

Набор  $\xi = (E, B, p, F, \varphi_\alpha)$  называется *локально тривиальным расслоением*,  $E$  — *пространством расслоения*,  $B$  — *базой расслоения*,  $F$  — *слоем*, а отображения  $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$  — *функциями склейки*. Если  $\{V_\beta\}$  — покрытие, более мелкое, чем покрытие  $\{U_\alpha\}$ , то на нем индуцируются однозначно свои функции склейки исходного расслоения. Функции склейки  $\varphi_{\alpha\beta}$  можно понимать как отображения

$$\varphi_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \rightarrow \text{Но не о } (F, F) \quad (1.3)$$

в группу гомеоморфизмов слоя  $F$ , причем на  $\varphi_{\alpha\beta}$  налагаются такие условия непрерывности, чтобы (1.2) являлось

гомеоморфизмом. При этом выполняются условия: для любой точки  $x \in U_{\alpha\beta\gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$

$$\varphi_{\beta\gamma}(x) \varphi_{\alpha\beta}(x) = \varphi_{\alpha\gamma}(x). \quad (1.4)$$

Если на пространстве  $B$  заданы покрытие  $\{U_\alpha\}$  и функции (1.3), удовлетворяющие условию (1.4), то существует такое локально тривиальное расслоение  $(E, B, p, F, \varphi_\alpha)$ , что (1.3) являются его функциями склейки.

Это означает, что локально тривиальное расслоение можно задавать с помощью функций склейки, не рассматривая пространства расслоения  $E$ .

С помощью функций склейки (1.2) легко определить обратный образ расслоения для непрерывного отображения баз. Именно, если  $f: B_1 \rightarrow B_2$  — непрерывное отображение,  $\xi = (E, B_2, p, F, \varphi_\alpha)$  — локально тривиальное расслоение,  $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$  — его функции склейки, то через  $f^*(\xi)$  обозначим локально тривиальное расслоение над пространством  $B_1$ , функции склейки которого задаются формулами

$$\varphi_{\alpha\beta}^* = \varphi_{\alpha\beta} \circ f$$

для атласа карт  $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ .

Простейшим примером локально тривиального расслоения является декартово произведение  $E = B \times F$ . В этом случае в качестве атласа карт следует взять одну карту  $U_\alpha = B$ . На любом, более мелком атласе карт будут индуцироваться функции склейки  $\varphi_{\alpha\beta}$ , принимающие значения в тождественном гомеоморфизме. Так, например, если  $B = S^1$  — окружность, а  $F = I$  — отрезок вещественной прямой, то  $B \times F$  есть просто прямой круговой цилиндр. Над той же базой  $B = S^1$  и с тем же слоем  $F = I$  можно построить и другое, уже нетривиальное расслоение. Для этого разобьем окружность  $S^1$  на два отрезка  $U_1 = \{0 \leq \varphi \leq \pi\}$ ,  $U_2 = \{\pi \leq \varphi \leq 2\pi\}$ . На картах  $U_1$ ,  $U_2$  мы зададим функцию склейки  $\varphi_{12}$  (тот факт, что  $U_1$  и  $U_2$  не являются открытыми множествами, мы для простоты игнорируем). Положим  $\varphi_{12}(0) = \text{id}$ ,  $\varphi_{12}(\pi) = -\text{id}$ . Тогда расслоение  $E$  является поверхностью, которая получается, если склеить у полосы  $[0, 2\pi] \times I$  противоположные ребра  $0 \times I$  и  $2\pi \times I$  с изменением направления в отрезке  $I$  (рис. 4).

Эта поверхность известна под названием «листа Мебиуса». Аналогично можно представить в виде локально



тривиальных расслоений и некоторые другие поверхности: тор и «бутылку Клейна».

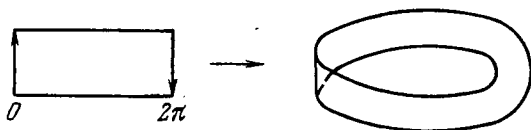
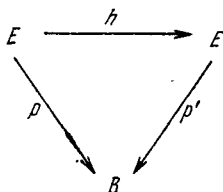


Рис. 4.

Отображение  $f: B \rightarrow E$  такое, что  $pf(x) = x$ ,  $x \in B$ , называется *сечением расслоения*.

Два расслоения  $(E, B, p, F, \varphi_\alpha)$  и  $(E', B, p, F, \varphi'_\alpha)$  считаются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм  $h: E \rightarrow E'$ , образующий коммутативную диаграмму



Меняя покрытие этих двух расслоений на одно, более мелкое, мы получаем, что функции склейки  $\varphi_{\alpha\beta}$  и  $\varphi'_{\alpha\beta}$  связаны соотношениями

$$\varphi_{\alpha\beta}(x)h_\alpha(x) = h_\beta(x)\varphi'_{\alpha\beta}(x) \quad (1.5)$$

для некоторых отображений

$$h_\alpha: U_\alpha \rightarrow \text{Номео}(F, F).$$

Если  $G \subset \text{Номео}(F, F)$  — некоторая подгруппа группы гомеоморфизмов слоя  $F$ , а

$$\varphi_{\alpha\beta}(U_{\alpha\beta}) \subset G, \quad (1.6)$$

то мы будем говорить, что задано локально тривиальное расслоение со структурной группой  $G$ . Может оказаться, что условия (1.6) не выполнены, но становятся справедливыми после применения формул (1.5), т. е. замены на функции склейки эквивалентного расслоения. В этом случае говорят, что структурная группа расслоения редуци-

руется к группе  $G$ . Если  $H \subset G$  — подгруппа,  $\varphi_{\alpha\beta}(x)$ ,  $h_\alpha(x) \in G$ ,  $\varphi_{\alpha\beta}(x) \in H$  в формуле (1.5), то говорят, что структурная группа  $G$  редуцируется к подгруппе  $H$ .

Одним из важных классов расслоений является класс вещественных векторных расслоений, т. е. локально тривиальных расслоений со слоем векторное пространство  $F = \mathbb{R}^n$  и структурной группой линейных преобразований векторного пространства  $G = GL(n, \mathbb{R})$ . Если  $F = \mathbb{C}^n$ , а структурная группа  $G = GL(n, \mathbb{C})$ , то говорят о комплексном векторном расслоении.

*Предложение 1.2. У вещественного векторного расслоения структурная группа  $GL(n, \mathbb{R})$  редуцируется к подгруппе  $O(n)$  ортогональных преобразований слоя  $\mathbb{R}^n$ . У комплексного векторного расслоения структурная группа  $GL(n, \mathbb{C})$  редуцируется к подгруппе  $U(n)$  преобразований слоя  $\mathbb{C}^n$ .*

Пространство  $\Gamma(\xi)$  всех непрерывных сечений вещественного векторного расслоения  $\xi$  естественным образом образует вещественное линейное бесконечномерное, вообще говоря, пространство. Операции сложения двух сечений  $f, g$  и умножения сечения  $f$  на вещественное число  $\lambda \in \mathbb{R}^1$  определяются в каждой карте. Композиции

$$\begin{aligned} f_\alpha: U_\alpha &\xrightarrow{f|U_\alpha} p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\varphi_\alpha} U_\alpha \times F \xrightarrow{\omega} F, \\ g_\alpha: U_\alpha &\xrightarrow{g|U_\alpha} p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\varphi_\alpha} U_\alpha \times F \xrightarrow{\omega} F \end{aligned}$$

являются вектор-функциями на карте  $U_\alpha$ . Операции сложения и умножения на число определяются поточечно:

$$\begin{aligned} (f_\alpha + g_\alpha)(x) &= f_\alpha(x) + g_\alpha(x), \\ (\lambda f_\alpha)(x) &= \lambda f_\alpha(x). \end{aligned}$$

Мы получаем две новые вектор-функции, по которым восстанавливаются отображения

$$\begin{aligned} f|_{U_\alpha} + g|_{U_\alpha}: U_\alpha &\rightarrow p^{-1}(U_\alpha), \\ \lambda f|_{U_\alpha}: U_\alpha &\rightarrow p^{-1}(U_\alpha), \end{aligned}$$

являющиеся сечениями на  $U_\alpha$ .

Остается только показать, что полученные отображения совпадают на пересечениях карт. Этот факт следует

из того, что функции склейки являются линейными преобразованиями слоя в каждой точке, т. е. сохраняют операции сложения и умножения на число в каждом слое.

Более того, операцию умножения на число можно расширить до операции умножения на непрерывные функции, превратив, таким образом, пространство сечений  $\Gamma(\xi)$  в модуль над кольцом  $R(B)$  непрерывных функций на базе  $B$ .

Например, если  $\xi$  — тривиальное расслоение, т. е.  $\xi = B \times \mathbb{R}^n$ , то пространство сечений  $\Gamma(\xi)$  является попросту пространством непрерывных вектор-функций, определенных на базе  $B$  и принимающих свои значения в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Если  $n=1$ , то  $\Gamma(\xi)$  совпадает с пространством скалярных функций на базе  $B$ .

Аналогично, в случае комплексного векторного расслоения  $\xi$  пространство непрерывных сечений является комплексным линейным пространством и модулем над кольцом  $C(B)$  комплексных непрерывных функций на базе  $B$ . В случае, если  $B$  — конечный полиэдр (например, компактное многообразие), то  $\Gamma(\xi)$  является проективным  $R(B)$ -модулем (соответственно проективным  $C(B)$ -модулем).

Пусть  $V_1, V_2$  — конечномерные вещественные (соответственно, комплексные) линейные пространства. Если

$$A_1: V_1 \rightarrow V_1, \quad A_2: V_2 \rightarrow V_2$$

— линейные изоморфизмы, то через  $A_1 \oplus A_2$ ,  $A_1 \otimes A_2$  обозначим прямую сумму и тензорное произведение изоморфизмов соответственно. Мы получаем, таким образом, гомоморфизмы групп

$$GL(n, \mathbb{R}) \times GL(m, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n+m, \mathbb{R}), \quad (1.7)$$

$$GL(n, \mathbb{R}) \times GL(m, \mathbb{R}) \rightarrow GL(nm, \mathbb{R}), \quad (1.8)$$

сопоставляющие паре изоморфизмов  $A_1, A_2$  изоморфизмы  $A_1 \oplus A_2$  и  $A_1 \otimes A_2$  соответственно. Гомоморфизмы (1.7) и (1.8) определяют операции над векторными расслоениями. Если  $\xi_1, \xi_2$  — два векторных расслоения над пространством  $B$  с функциями склейки  $\varphi_{\alpha\beta}^1$  и  $\varphi_{\alpha\beta}^2$ , то через  $\xi_1 \oplus \xi_2$  обозначим расслоение с функциями склейки  $\varphi_{\alpha\beta}^1 \oplus \varphi_{\alpha\beta}^2$ , а через  $\xi_1 \otimes \xi_2$  обозначим расслоение с функциями склейки  $\varphi_{\alpha\beta}^1 \otimes \varphi_{\alpha\beta}^2$ .

Аналогичным образом, если  $\Lambda_i(V)$  есть  $i$ -я внешняя степень векторного пространства  $V$ , то изоморфизм  $A: V \rightarrow V$  определяет изоморфизм  $\Lambda_i(A): \Lambda_i(V) \rightarrow \Lambda_i(V)$  внешней степени пространства, так что получается гомоморфизм групп линейных преобразований пространств  $V$  и  $\Lambda_i(V)$ . Тогда через  $\Lambda_i(\xi)$  обозначим векторное расслоение с функциями склейки  $\Lambda_i(\varphi_{\alpha\beta})$ . Далее, если  $V^*$  — пространство, сопряженное к пространству  $V$ , то эта операция тоже индуцирует операцию над векторными расслоениями. Результат обозначается через  $\xi^*$ .

Пусть  $\xi_1, \xi_2$  — два векторных расслоения:

$$\xi_1 = (E_1, p_1, B, F_1, \varphi_\alpha^1), \quad \xi_2 = (E_2, p_2, B, F_2, \varphi_\alpha^2).$$

Пусть  $f: E_1 \rightarrow E_2$  — послойное отображение, линейное на каждом слое. Условие линейности, очевидно, можно установить только для отображения  $\varphi_\alpha^2 f (\varphi_\alpha^1)^{-1}$ , однако, поскольку функции склейки являются линейными преобразованиями, то это условие не зависит от выбора индекса  $\alpha$ . Отображение  $f$  называется гомоморфизмом расслоения  $\xi_1$  в расслоение  $\xi_2$ .

Если гомоморфизм  $f: \xi_1 \rightarrow \xi_2$  является мономорфизмом в каждом слое, то пространство, составленное из факторпространств слоев над каждой точкой, является локально тривиальным расслоением и называется *фактор-расслоением*. Более точное определение заключается в следующем. Пусть  $\{U_\alpha\}$  — атлас карт,

$$f_\alpha: U_\alpha \times F_1 \rightarrow U_\alpha \times F_2$$

определяется по формуле

$$f_\alpha = \varphi_\alpha^2 \circ f \circ (\varphi_\alpha^1)^{-1}.$$

Если  $\varphi_{\alpha\beta}^k = \varphi_\alpha^k \circ (\varphi_\beta^k)^{-1}$  — функции склейки, то  $f_\alpha \varphi_{\alpha\beta}^1 = \varphi_{\alpha\beta}^2 f_\beta$ .

Определим функции склейки  $\psi_{\alpha\beta}$  нового расслоения со слоем  $F_2/F_1$ . Обозначим через  $H_\alpha$  пространство классов смежности пространства  $U_\alpha \times F_2$  по подпространствам  $f_\alpha(U_\alpha \times F_1)$ . Можно показать, что для достаточно малой окрестности  $U_\alpha$  пространство  $H_\alpha$  гомеоморфно  $U_\alpha \times F_2/F_1$ . Таким образом, пусть  $g_\alpha$  — такой гомоморфизм,

$$g_\alpha: U_\alpha \times F_2 \rightarrow U_\alpha \times F_2/F_1,$$

что в каждом слое ядро гомоморфизма  $g_\alpha$  совпадает с образом  $f_\alpha$ . Тогда существуют и единственны такие гомеоморфизмы

$$\psi_{\alpha\beta}: U_{\alpha\beta} \times F_2/F_1 \rightarrow U_{\alpha\beta} \times F_2/F_1,$$

что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U_{\alpha\beta} \times F_2 & \xrightarrow{g_\alpha} & U_{\alpha\beta} \times F_2/F_1 \\ \uparrow \psi_{\alpha\beta}^2 & & \uparrow \psi_{\alpha\beta} \\ U_{\alpha\beta} \times F_2 & \xrightarrow{g_\beta} & U_{\alpha\beta} \times F_2/F_1 \end{array}$$

коммутативна. Функции  $\psi_{\alpha\beta}$  удовлетворяют всем свойствам функций склейки расслоения. Соответствующее функциям склейки  $\psi_{\alpha\beta}$  расслоение и называется фактор-расслоением.

Если база векторного расслоения  $\xi$  является гладким многообразием  $M$ , то можно требовать, чтобы функции склейки

$$\psi_{kj}: U_{kj} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

являлись гладкими функциями, считая группу  $GL(n, \mathbb{R})$  областью в  $n^2$ -мерном евклидовом пространстве всех матриц порядка  $n$ .

Оказывается, что всякое векторное расслоение над гладким многообразием  $M$  допускает гладкие функции склейки при надлежащем выборе карт и гомеоморфизмов  $\varphi_k$ . Это утверждение следует из стандартных теорем о равномерной аппроксимации непрерывной функции последовательностью гладких функций. Если  $\xi = (E, p, M, \mathbb{R}^n, \varphi_k)$  — векторное расслоение над гладким многообразием  $M$  с гладкими функциями склейки, то пространство расслоения  $\xi$  является гладким многообразием, а все отображения, входящие в определение расслоения, являются гладкими отображениями.

Сечение  $f: M \rightarrow E$  расслоения  $\xi$  называется *гладким сечением*, если в любой карте  $U_k$  композиция

$$\varphi_k \circ (f|U_k): U_k \rightarrow U_k \times \mathbb{R}^n$$

является гладким отображением.

Свойство сечения  $f$  быть гладким в окрестности точки  $x \in M$  не зависит от выбора карты  $U_k$ , содержащей точку  $x$ .

Важным примером векторного расслоения на многообразии  $M$  является так называемое касательное расслоение. Пусть

$$f: V_1 \rightarrow V_2$$

— гладкое отображение области  $V_1 \subset \mathbb{R}^n$  в область  $V_2 \subset \mathbb{R}^n$ . Через  $Df$  обозначим матричнозначную функцию на  $V_1$ , составленную из всех частных производных отображения  $f$ . Если  $g = f_1 \circ f_2$  — композиция двух отображений, то

$$(Dg)(x) = Df_1(f_2(x)) \cdot Df_2(x), \quad (1.9)$$

где в правой части (1.9) стоит произведение матриц  $Df_1(f_2(x))$  и  $Df_2(x)$ .

Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $\{U_k\}$  — атлас локальных карт,  $\varphi_k: U_k \rightarrow V_k \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi_{kj}: V_{kj} \rightarrow V_{jh}$  — такие же, как и в определении гладкого многообразия. Тогда матричнозначные функции  $\psi_{kj}(x) = D\varphi_{kj}(\varphi_k(x))$  удовлетворяют условиям (1.4). Легко проверить, что

$$\det \psi_{kj}(x) \neq 0.$$

Следовательно, функции  $\psi_{kj}$  являются функциями склейки некоторого векторного расслоения. Это расслоение называется *касательным расслоением* многообразия  $M$  и обозначается через  $TM$ .

Рассмотрим несколько примеров многообразий и касательных расслоений. Пусть  $M = S^1$  — окружность. Тогда в качестве локальной координаты на окружности можно взять одно из значений углового параметра  $\varphi$ . На пересечении карт мы получим две локальные координаты, которые в силу определения будут отличаться друг от друга на постоянную функцию, кратную  $2\pi$ . Следовательно, матрица частных производных (в данном случае просто производная) равна тождественно единице. Таким образом, все функции склейки касательного расслоения  $TS^1$  тождественно равны единичному гомеоморфизму слоя  $\mathbb{R}^1$ , и, значит,  $TS^1 = S^1 \times \mathbb{R}^1$ .

Аналогично, можно показать, что на двумерном торе  $T^2$  касательное расслоение тривиально:  $T(T^2) = T^2 \times \mathbb{R}^2$ . В случае же двумерной сферы  $S^2$  касательное расслоение  $TS^2$  нетривиально.

Поскольку пространство  $TM$  само является гладким многообразием, то для него имеет смысл говорить о

касательном расслоении. Пусть

$$p: TM \rightarrow M$$

— естественная проекция. Тогда

$$TTM = p^*(TM) \oplus p^*(TM).$$

В общем случае для векторного расслоения  $\xi$  над гладким многообразием  $M$  имеет место изоморфизм

$$T\xi = p^*(\xi) \oplus p^*TM.$$

Гладкие сечения касательного расслоения  $TM$  называются *векторными полями* на многообразии  $M$ . Каждое векторное поле  $X$  определяет оператор дифференцирования кольца гладких функций  $C^\infty(M)$  на многообразии  $M$ . Этот оператор определяется следующим образом. Пусть  $U_k \subset M$  — локальная карта,  $x_k^1, \dots, x_k^n$  — локальная система координат в карте  $U_k$ . Поскольку расслоение  $TM$  над картой  $U_k$  гомеоморфно прямому произведению  $U_k \times \mathbb{R}^n$ , то сечение  $X$  может быть записано в базисе  $(e_1, \dots, e_n)$  пространства  $\mathbb{R}^n$  в виде линейной комбинации

$$X(x) = \sum_{j=1}^n X_k^j(x) e_j,$$

где  $X_k^j(x)$  — гладкие функции в карте  $U_k$ . Пусть  $f \in C^\infty(M)$  — произвольная гладкая функция на многообразии  $M$ . Положим

$$X(f)(x) = \sum_{k=1}^n X_k^j(x) \frac{\partial f}{\partial x_k^j}(x). \quad (1.10)$$

Значение левой части (1.10) не зависит от выбора локальной системы координат  $(x_1', \dots, x_k')$  в силу определения функций склеек расслоения  $TM$  и правила дифференцирования сложной функции.

Между прочим, справедливо и обратное утверждение. Всякий оператор дифференцирования

$$A: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M),$$

т. е. оператор  $A$ , удовлетворяющий равенству

$$A(f \cdot g) = A(f)g + fA(g),$$

определяется некоторым гладким векторным полем.

Векторное поле  $X$ , имеющее вид  $X(x) = e_i$  в локальной системе координат  $(x^1, \dots, x^n)$ , обозначается через  $\partial/\partial x^i$ . Значение векторного поля  $X$  в отдельной точке  $x \in M$  называется касательным вектором в точке  $x$  к многообразию  $M$ , а весь слой касательного расслоения  $TM$  называется касательным пространством. С каждым касательным вектором  $X$  в точке  $x$  можно связать функционал дифференцирования  $X_x: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{C}$ , определяемый формулой (1.10), и, обратно, всякий функционал  $A$ , удовлетворяющий равенству

$$A(fg) = A(f)g(x) + f(x)A(g),$$

определяется некоторым касательным вектором в точке  $x \in M$ .

Пусть  $\varphi: [0, 1] \rightarrow M$  — гладкая кривая. Тогда в каждой точке  $\varphi(t_0)$ ,  $0 \leq t_0 \leq 1$ , естественным образом определяется вектор, касательный к кривой  $\varphi$ , обозначаемой через  $d\varphi/dt$ . Задать этот вектор можно, например, с помощью функционала дифференцирования

$$f \rightarrow \frac{d}{dt} f(\varphi(t)) \big|_{t=t_0}.$$

В локальной системе координат вектор, касательный к кривой  $\varphi$ , задается координатами, равными производным вектор-функции  $\varphi$ .

Иногда удобно понимать касательный вектор  $X_x$  как «инфинитезимальную кривую»  $\varphi$ , проходящую через заданную точку  $x$ , т. е. как пучок кривых, проходящих через точку  $x$  и совпадающих с точностью до второго порядка малости по параметру. Тогда, если многообразие  $M$  гладко вложено в евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$ , то каждый касательный вектор  $X_x$ ,  $x \in M$ , можно реализовать направленным отрезком в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , начало которого равно точке  $x \in M \subset \mathbb{R}^n$ . Множество всех касательных векторов многообразия в точке  $x$  порождает линейное многообразие в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ , проходящее через точку  $x$  и касающееся многообразия  $M$ . Однако все касательное расслоение, как правило, нельзя реализовать в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , поскольку линейные многообразия, касающиеся многообразия  $M$  в различных точках, могут иметь непустое пересечение.



Примером вложения касательного расслоения в евклидово пространство служит линейчатая поверхность в  $\mathbb{R}^3$ , составленная из прямых, касающихся винтовой линии (рис. 5).

С каждым гладким векторным полем  $X$  на многообразии  $M$  можно связать «систему обыкновенных дифференциальных уравнений», т. е. задачу об отыскании таких гладких кривых  $\varphi$ , чтобы

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t)). \quad (1.11)$$

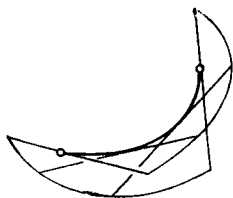


Рис. 5.

В каждой локальной системе координат уравнение (1.11) записывается в виде настоящей системы из  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений. Согласно теоремам существования и единственности для любой точки  $x_0 \in M$  существует и единственная такая гладкая кривая  $\varphi(t, x_0)$ ,  $-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$ , что

$$\varphi(0, x_0) = x_0$$

и выполнено уравнение (1.11). Если  $M$  — компактное многообразие, то  $\varepsilon$  можно выбрать как угодно большим, так что функция  $\varphi(t, x)$  образует группу преобразований многообразия  $M$ , параметризованную вещественными числами  $t \in \mathbb{R}^1$ :

$$\varphi(t_1, \varphi(t_2, x)) = \varphi(t_1 + t_2, x).$$

Рассмотрим пример векторного поля на двумерном торе  $T^2$ , задаваемого в угловых координатах системой уравнений

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = a, \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = b,$$

где  $a, b$  — постоянные числа. Решениями этой системы являются кривые

$$\varphi_1 = at + \varphi_{10}, \quad \varphi_2 = bt + \varphi_{20}.$$

Если числа  $a$  и  $b$  рационально соизмеримы, т. е. если  $a/b$  — рациональное число, то каждая траектория является периодической, т. е. замкнутой кривой на торе  $T^2$ .

Если числа  $a$  и  $b$  рационально несоизмеримы, т. е.  $a/b$  — иррациональное число, то каждая траектория образует плотное множество на торе  $T^2$ . В этом случае говорят, что движение, задаваемое векторным полем, является условно периодическим.

На гладком многообразии  $M$  изучают, кроме векторных полей, и другие дифференциальные объекты, называемые *внешними дифференциальными формами*.

Внешние дифференциальные формы порядка  $k$  определим как гладкие сечения расслоения  $\Lambda_k(T(M)^*)$ . Пространство внешних дифференциальных форм порядка  $k$  обозначим через  $\Omega_k(M)$ . Если  $\omega \in \Omega_k(M)$ ,  $X_1, \dots, X_k$  — векторные поля, то определена гладкая функция  $\omega(X_1, \dots, X_k)$  как значение сечения  $\omega$  на векторах  $X_1(x), \dots, X_k(x)$  касательного пространства в точке  $x$ , поскольку  $\Lambda_k(T(M)^*) = (\Lambda_k T(M))^*$ . Через  $\omega_1 \wedge \omega_2$  будем обозначать внешнее произведение двух форм, индуцированное операцией внешнего произведения векторов во внешних степенях конечномерного векторного пространства.

**Предложение 1.3.** *Существует и единствен оператор*

$$d: \Omega_k(M) \rightarrow \Omega_{k+1}(M),$$

*удовлетворяющий условиям:*

$$а) \quad d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{\deg \omega_1} \omega_1 \wedge d\omega_2;$$

б)  $(df)(X) = X(f)$ , где  $f \in C^\infty(M) = \Omega_0(M)$ ,  $X$  — векторное поле;

$$в) \quad d^2 = 0.$$

**Предложение 1.4.** *В локальной системе координат  $(x^1, \dots, x^n)$  любая внешняя дифференциальная форма  $\omega$  степени  $k$  имеет вид*

$$\omega(x) = \sum_{(i_1, \dots, i_k)} a_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

*В частности,  $\Omega_k(M) = 0$  при  $k > n$ , а любая форма  $\omega \in \Omega_k(M)$  имеет вид*

$$\omega(x) = f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (1.12)$$

*Если  $(y^1, \dots, y^n)$  — другая локальная система координат, то*

$$\omega(x) = f(x) \cdot \det \left\| \frac{\partial x^j}{\partial y^k} \right\| dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n.$$

Многообразие  $M$  называется *ориентированным*, если существует такая форма  $\omega \in \Omega_n(M)$ , что для каждой точки  $x \in M$  найдется локальная система координат  $(x^1, \dots, x^n)$ , для которой в формуле (1.12)

$$f(x) > 0. \quad (1.13)$$

Набор локальных систем координат, удовлетворяющих (1.13), называется *ориентацией* многообразия  $M$ .

Например, окружность  $S^1$  является ориентированным многообразием, поскольку существует дифференциальная форма  $d\varphi$ , имеющая одинаковый вид для любого углового параметра  $\varphi$  в окрестности каждой точки окружности  $S^1$ .

Точно так же на двумерной сфере  $S^2$  в каждой из шести карт,  $x > 0, y > 0, z > 0, x < 0, y < 0, z < 0$ , дифференциальную форму можно задать следующими равенствами:

$$\text{при } z > 0 \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx \wedge dy,$$

$$\text{при } x > 0 \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{1-y^2-z^2}} dy \wedge dz,$$

$$\text{при } y > 0 \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-z^2}} dz \wedge dx,$$

$$\text{при } z < 0 \quad \omega = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx \wedge dy,$$

$$\text{при } y < 0 \quad \omega = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2-z^2}} dy \wedge dz,$$

$$\text{при } x < 0 \quad \omega = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2-z^2}} dz \wedge dx.$$

Тривиальная проверка показывает, что определение формы  $\omega$  согласовано на пересечениях карт и, значит, согласно определению многообразие  $S^2$  является ориентуемым.

Определение ориентируемости можно также сформулировать следующим образом: существует такой атлас карт, что якобианы замен координат положительны в пересечении любой пары карт.

Покажем, например, что лист Мебиуса является неориентуемым многообразием. Лист Мебиуса можно

представить себе склеенным из двух прямоугольников  $U_1$  и  $U_2$ . Введем в прямоугольнике  $U_1$  координаты  $(x_1, x_2)$ ,  $0 < x_1 < 1$ ,  $0 < x_2 < 1$ , а в прямоугольнике  $U_2$  — координаты  $(y_1, y_2)$ ,  $0 < y_1 < 1$ ,  $0 < y_2 < 1$ . Пусть карты  $U_1$  и  $U_2$  склеены с помощью отображения  $\varphi_{12}$ :

$$\varphi_{12}(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1 + 1/2, x_2), & 0 < x_1 < 1/2, \\ (x_1 - 1/2, 1 - x_2), & 1/2 < x_1 < 1. \end{cases}$$

Тогда якобиан  $\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)}$  замены координат равен

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{cases} 1, & 0 < x_1 < 1/2, \\ -1, & 1/2 < x_1 < 1, \end{cases}$$

и, следовательно, меняет знак в различных точках на пересечении карт.

Более тонкая задача заключается в том, чтобы доказать, что подобная ситуация наблюдается в любом атласе карт на листе Мебиуса. Мы опустим это доказательство.

Если  $f$  — гладкая функция на гладком многообразии  $M$ , то  $df$  является внешней дифференциальной формой, т. е. сечением кокасательного расслоения  $T^*M$ . Это сечение можно также трактовать как послойно линейное отображение

$$df: TM \rightarrow R^1$$

касательного расслоения  $TM$  в пространстве вещественных чисел  $R^1$ . Тогда диагональное отображение

$$Df = (df, f): TM \rightarrow R^1 \times R^1 = TR^1$$

является послойно линейным отображением касательных пространств.

Указанная трактовка дифференциала функции обобщается на случай произвольного гладкого отображения многообразий. Отображение  $f: M_1 \rightarrow M_2$  гладких многообразий называется *гладким отображением*, если в каждой локальной системе координат многообразий  $M_1$  и  $M_2$  отображение  $f$  представляется в виде гладкой вектор-функции. Условие гладкости отображения  $f$  не зависит от выбора локальной системы координат как в многообразии  $M_1$ , так и в многообразии  $M_2$ .

Пусть  $(x^1, \dots, x^n)$ ,  $(y^1, \dots, y^m)$  — локальные системы координат многообразий  $M_1$  и  $M_2$  в картах  $U$  и  $V$  соответственно. Тогда отображение  $f$  имеет вид

$$y^j = f^j(x^1, \dots, x^n), \quad j = 1, \dots, m.$$

Рассмотрим матричнозначную функцию

$$Df(x) = \left\| \frac{\partial f^j}{\partial x^k}(x) \right\|. \quad (1.14)$$

Функцию (1.14) можно понимать как линейное отображение

$$Df: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow V \times \mathbb{R}^m. \quad (1.15)$$

Предложение 1.5. *Линейные отображения вида (1.15) определяют гомоморфизм касательных расслоений*

$$Df: TM_1 \rightarrow TM_2,$$

так что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} TM_1 & \xrightarrow{Df} & TM_2 \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

Доказательство основано на формальном применении правила дифференцирования сложных функций.

Отображение  $Df$  называется *дифференциалом отображения  $f$* . Поскольку мы определили отображение  $Df$  касательных векторов к многообразию  $M_1$  в касательные векторы к многообразию  $M_2$ , то с его помощью можно определить отображение пространств внешних дифференциальных форм

$$f^*: \Omega_k(M_2) \rightarrow \Omega_k(M_1),$$

полагая

$$f^*(\omega)(X_1, \dots, X_k)(x) = \omega(DfX_1(fx), \dots, DfX_k(fx)).$$

Тогда

$$f^*(d\omega) = df^*(\omega), \quad (1.16)$$

$$f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*(\omega_1) \wedge f^*(\omega_2).$$

Отображение  $f: M_1 \rightarrow M_2$  называется *вложением*, если  $f$  является взаимно однозначным отображением на замкнутое подпространство  $f(M_1)$  и  $Df$  является мономорфизмом в каждом слое касательного расслоения.

Например, вложение  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  отрезка вещественной прямой в трехмерное евклидово пространство является регулярной гладкой кривой. Условия мономорфности дифференциала  $Df$  в каждом слое сводится к следующему неравенству:  $\frac{df}{dt}(t) \neq 0$ ,  $t \in [a, b]$ , т. е. вектор скорости должен быть отличен от нуля в каждой точке кривой.

Аналогично, условие невырожденности поверхности в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$ , заданной параметрически как отображение квадрата  $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , сводится к тому, что частные производные  $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ ,  $u \in [a, b]$ ,  $v \in [c, d]$ , вектор-функции  $f(u, v)$  линейно независимы. Это условие эквивалентно тому, что матрица Якоби

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial u} & \frac{\partial f^1}{\partial v} \\ \frac{\partial f^2}{\partial u} & \frac{\partial f^2}{\partial v} \\ \frac{\partial f^3}{\partial u} & \frac{\partial f^3}{\partial v} \end{vmatrix}$$

отображения  $f(u, v) = (f^1(u, v), f^2(u, v), f^3(u, v))$  имеет максимальный ранг, т. е. дифференциал  $Df$  является мономорфизмом.

Теперь мы введем *когомологии де Рама* на гладком многообразии. Оператор  $d$  из предложения 1.3 образует цепной комплекс

$$\Omega_0(M) \xrightarrow{d} \Omega_1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega_n(M),$$

т. е. такую последовательность гомоморфизмов, что

$$\text{Ker}^k d \supset \text{Im}^k d,$$

где

$$\text{Ker}^k d = \{\omega: \omega \in \Omega_k(M) \text{ и } d\omega = 0\},$$

$$\text{Im}^k d = d(\Omega_{k-1}(M)).$$

Положим

$$H_d^k(M) = \text{Ker}^k d / \text{Im}^k d.$$

Группа  $H_d^k(M)$  называется *группой  $k$ -мерных когомологий де Рама*. Условие (1.16) порождает естественные гомоморфизмы

$$f^*: H_d^k(M_2) \rightarrow H_d^k(M_1)$$

для гладкого отображения

$$f: M_1 \rightarrow M_2.$$

Существует и другое определение когомологий, годное для любого топологического пространства  $X$ . Это так называемые спектральные когомологии. Пусть на пространстве  $X$  задано открытое покрытие  $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ . Обозначим через  $C^k(X, \mathfrak{U})$  группу, элементами которой являются наборы постоянных функций  $\{f_{\alpha_0 \dots \alpha_k}\}$ , определенных на всевозможных пересечениях вида  $U_{\alpha_0 \dots \alpha_k} = U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_k} \neq \emptyset$ . Группа  $C^k(X, \mathfrak{U})$  называется *группой коцепей* покрытия  $\mathfrak{U}$ , а элементы — *коцепями* покрытия  $\mathfrak{U}$ . Определим гомоморфизм

$$\partial: C^k(X, \mathfrak{U}) \rightarrow C^{k+1}(X, \mathfrak{U})$$

равенством

$$(\partial f)_{\alpha_0 \dots \alpha_{n+1}} = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j f_{\alpha_0 \dots \hat{\alpha}_j \dots \alpha_{n+1}}$$

(индекс  $\hat{\alpha}_j$  с «крышкой» означает, что данный индекс пропущен). Имеет место равенство

$$\partial^2 = 0,$$

так что, как и в случае когомологий де Рама, можно определить группы когомологий

$$H^k(X, \mathfrak{U}) = \text{Ker}^k \partial / \text{Im}^k \partial.$$

Пусть  $\mathfrak{B} = \{V_\beta\}$  — другое открытое покрытие, более мелкое, чем  $\mathfrak{U}$ . Это значит, что

$$V_\beta \subset U_{\alpha(\beta)} \quad (1.17)$$

и поэтому

$$V_{\beta_0 \dots \beta_k} \subset U_{\alpha(\beta_0) \dots \alpha(\beta_k)}. \quad (1.18)$$

Таким образом, соотношение (1.18) определяет отображение

$$\pi: C^k(X, \mathfrak{U}) \rightarrow C^k(X, \mathfrak{B}),$$

причем

$$\partial\pi = \pi\partial. \quad (1.19)$$

Условие (1.19) означает, что гомоморфизмы  $\pi$  индуцируют гомоморфизмы

$$\pi^*: H^k(X, \mathfrak{U}) \rightarrow H^k(X, \mathfrak{B}). \quad (1.20)$$

*Предложение 1.6. Гомоморфизм (1.20) не зависит от выбора индекса  $\alpha(\beta)$  для включения (1.17).*

Таким образом, мы получаем корректно определенную последовательность групп  $H^k(X, \mathfrak{U})$ , направленную по включению одного покрытия в другое. Положим

$$H^k(X) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^k(X, \mathfrak{U})$$

и назовем группы  $H^k(X)$  *спектральными когомологиями*.

*Предложение 1.7. Пусть покрытие  $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$  таково, что все множества  $U_{\alpha_0 \dots \alpha_k}$  стягиваемы. Тогда гомоморфизм*

$$H^k(X, \mathfrak{U}) \rightarrow H^k(X)$$

*является изоморфизмом.*

Примером такого покрытия может служить следующее покрытие. Пусть  $X$  — симплициальный комплекс, т. е. пространство, являющееся конечным объединением  $X = \bigcup_{\alpha} X_{\alpha}$  замкнутых подпространств  $X_{\alpha}$ , гомеоморфных стандартным линейным симплексам различных размерностей, причем  $X_{\alpha}$  пересекаются по некоторым граням. Тогда, если  $e_1, \dots, e_s$  — нульмерные симплексы, то множества

$$U_j = \text{st } e_j = U\{\dot{X}_{\alpha}: X_{\alpha} \ni e_j\}$$



открыты, покрывают пространство  $X$  и удовлетворяют условиям предложения 1.7.

Если пространство  $X$  является гладким многообразием, то оба определения когомологий совпадают.

**Теорема 1.8.** *Когомологии де Рама  $H_d^k(M)$  и спектральные когомологии  $H^k(M)$  гладкого многообразия  $M$  изоморфны.*

Покажем, как можно такой изоморфизм установить в случае, когда многообразие  $M$  представлено как комплекс, составленный из гладких симплексов. Пусть сначала  $M$  — ориентируемое многообразие и  $\omega \in \Omega_n(M)$ ,  $\dim M = n$ . Если  $M$  является областью в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  с координатами  $(x^1, \dots, x^n)$ , то согласно формуле (1.12)

$$\omega(x) = f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Положим

$$\int_M \omega = \int \dots \int_M f(x) dx^1 dx^2 \dots dx^n. \quad (1.21)$$

Если  $(y^1, \dots, y^n)$  — другая система координат из той же ориентации, то

$$\det \frac{\partial (x^1, \dots, x^n)}{\partial (y^1, \dots, y^n)} > 0$$

и, следовательно, определение (1.21) не зависит от выбора системы координат в ориентированной области  $M \subset \subset \mathbb{R}^n$ . Теперь уже ясно, как определить интеграл формы  $\omega$  для любого ориентированного многообразия  $M$ . Нужно покрыть многообразие  $M$  локальными картами  $U_k$ , выбрать в них локальные системы координат с одной и той же ориентацией и положить

$$\int_M \omega = \sum_s (-1)^{s+1} \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)} \int_{U_{\alpha_1 \dots \alpha_s}} \omega.$$

Слагаемые по различным пересечениям необходимы для компенсации повторного интегрирования формы по общим множествам.

**Предложение 1.9.** *Если*

$$f: M_1 \rightarrow M_2$$

— гладкое отображение, сохраняющее ориентацию, то

$$\int_{M_1} f^*(\omega) = \int_{M_2} \omega.$$

**Предложение 1.10.** Пусть  $M$  — компактное ориентируемое гладкое многообразие с краем  $\partial M$ ,  $\dim M = n$ ,  $\omega \in \Omega_{n-1}(M)$ . Тогда при подходящем выборе ориентации в  $\partial M$  справедлива формула Стокса

$$\int d\omega = \int_{\partial M} \omega. \quad (1.22)$$

**Доказательство.** Для доказательства формулы Стокса заметим, что формула (1.22) линейна относительно формы  $\omega$ . Следовательно, если  $\omega = \sum_i \omega_i$  и формула

(1.22) справедлива для каждого слагаемого  $\omega_i$  в отдельности, то она справедлива и для формы  $\omega$ . Поскольку многообразие  $M$  компактно, то существует конечный атлас карт  $\{U_j\}$ , а согласно предложению 1.1 разбиение единицы  $\{\varphi_j\}$ , подчиненное покрытию  $\{U_j\}$ . Тогда форму  $\omega$  можно представить в виде  $\omega = \sum_j \omega_j$ , где  $\omega_j = \varphi_j \omega$ . Носитель формы  $\omega_j$  компактен и лежит в карте  $U_j$ . Поэтому достаточно проверить формулу (1.22) для каждого слагаемого  $\omega_j$  в отдельности. Поскольку  $\text{supp } \omega_j \subset U_j$ , то и  $\text{supp } d\omega_j \subset U_j$ , а интегралы можно брать по карте  $U_j$ :

$$\int_M d\omega_j = \int_{U_j} d\omega_j, \quad \int_{\partial M} \omega_j = \int_{\partial M \cap U_j} \omega_j.$$

Следовательно, мы можем считать, используя локальные координаты карты  $U_j$ , что интегрирование формы  $\omega_j$  происходит по  $(n-1)$ -мерному евклидову пространству  $\mathbb{R}^{n-1}$ , а интегрирование формы  $d\omega_j$  происходит по полупространству  $\mathbb{R}_+^n = \{x_n \geq 0\}$ .

Таким образом, достаточно доказать формулу (1.22) для частного случая многообразия  $\mathbb{R}_+^n$  с краем  $\mathbb{R}^{(n-1)}$  и формы  $\omega$  на нем с компактным носителем.

В этом частном случае  $(n-1)$ -мерную форму  $\omega$  можно представить в виде

$$\omega = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

где каждая функция  $\lambda_i(x_1, \dots, x_n)$  имеет компактный носитель. Применяя аналогичные рассуждения, достаточно проверить формулу (1.22) для случая одного слагаемого

$$\begin{aligned} \omega &= \lambda(x_1 \dots x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n, \\ d\omega &= (-1)^{i-1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Возможны два случая. Пусть  $i \neq n$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} d\omega &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \dots \int (-1)^{i-1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \dots \int dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n \left( \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} dx_i \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что внутренний интеграл равен нулю в силу компактности носителя функции  $\lambda$ . Значит,

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} d\omega = 0.$$

С другой стороны,

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \omega = \int_{\mathbb{R}^{(n-1)}} \lambda(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) dx_1 dx_2 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n,$$

где  $x_n = 0$ . Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n-1}} \omega = 0.$$

Пусть теперь  $i=n$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} d\omega &= \int \dots \int_{\mathbb{R}_+^n} (-1)^{n-1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} (x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int \dots \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx_1 \dots dx_{n-1} \left( \int_0^\infty (-1)^{n-1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_n} dx_n \right) = \\ &= \int \dots \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx_1 \dots dx_n ((-1)^n \lambda(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)) = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega. \end{aligned}$$

При подходящем выборе ориентации на  $\mathbb{R}^{n-1}$  получаем формулу (1.22).

Формула Стокса (1.22) является обобщением классических формул вычисления интегралов второго рода по замкнутым кривым и поверхностям. Если кривая  $\Gamma$  расположена без самопересечений в плоскости  $\mathbb{R}^2$ , то соответствующая формула называется формулой Грина. В самом деле, интеграл второго рода  $\oint_{\Gamma} (P dx + Q dy)$  по

замкнутой кривой  $\Gamma$  можно интерпретировать как интеграл дифференциальной формы  $\omega = P dx + Q dy$  по одномерному многообразию  $\Gamma$ .

Пусть  $\Omega$  — двумерная область, ограниченная кривой  $\Gamma$ . Тогда  $\Omega$  является двумерным многообразием с краем, причем  $\partial\Omega = \Gamma$ . Тогда согласно формуле Стокса (1.22)

имеем  $\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$ . Дифференциал  $d\omega$  вычисляем стандартным образом:

$$\begin{aligned} d\omega &= d(P dx + Q dy) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \\ &= \left( \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy. \end{aligned}$$

Поскольку  $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$  в силу косой симметрии дифференциальных форм, то

$$d\omega = \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

Тогда

$$\oint_{\Gamma} (P dx + Q dy) = \int_{\partial \Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Последняя формула и называется формулой Грина.

Аналогично, если замкнутая кривая  $\Gamma$  вложена в трехмерное пространство  $R^3$  и ограничивает двумерную поверхность  $S$ , т. е.  $\partial S = \Gamma$ , то интеграл второго рода

$\oint_{\Gamma} (P dx + Q dy + R dz)$  мы интерпретируем как интеграл дифференциальной формы  $\omega = P dx + Q dy + R dz$  по многообразию  $\Gamma$ . Тогда, снова применяя формулу Стокса (1.22), получаем формулу

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (P dx + Q dy + R dz) = \int_{\partial S = \Gamma} d\omega = \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx \right\}, \end{aligned}$$

которая тоже носит название формулы Стокса.

Наконец, если  $S$  — замкнутая поверхность в трехмерном пространстве  $R^3$ , ограничивающая некоторую трехмерную область  $V$ ,  $\partial V = S$ , то интеграл второго рода

$$\oint_S (P dx dy_z + Q dy_z dx + R dz dx dy)$$

мы интерпретируем как интеграл двумерной дифференциальной формы

$$\omega = P dx \wedge dy_z + Q dy_z \wedge dx + R dx \wedge dy$$

по двумерному многообразию  $S$ . Применяя формулу (1.22), получаем формулу Гаусса — Остроградского

$$\begin{aligned} \oint_S (P dx dy_z + Q dy_z dx + R dx dy) = \int_{S = \partial V} \omega = \\ = \int_V d\omega = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} \right) dx dy dz. \end{aligned}$$

Вернемся теперь к некоторому симплициальному разбиению многообразия  $M$ . Пусть  $e_1, \dots, e_s$  — нульмерные сим-

плексы,  $U_j = \text{st } e_j$  — объединение всех симплексов, содержащих точку  $e_j$ ,  $\mathfrak{U} = \{U_j\}$ . Пересечение  $U_{j_0 \dots j_k} = U_{j_0} \cap \dots \cap U_{j_k}$  непусто тогда и только тогда, когда точки  $e_{j_0}, \dots, e_{j_k}$  являются вершинами некоторого (единственного) симплекса. Обозначим этот симплекс через  $\sigma_{j_0 \dots j_k}$ . Теперь мы можем построить гомоморфизм  $\alpha: \Omega_k(M) \rightarrow C^k(M, \mathfrak{U})$ . Пусть  $\omega \in \Omega_k(M)$ ,  $U_{j_0 \dots j_k} \neq \emptyset$ . Положим

$$\alpha(\omega)(U_{j_0 \dots j_k}) = \int_{\sigma_{j_0 \dots j_k}} \omega.$$

Из (1.22) следует

**Лемма 1.11.** *Для  $\omega \in \Omega_k(M)$  справедливо следующее равенство:*

$$\partial \alpha(\omega) = \alpha(d\omega). \quad (1.23)$$

В силу (1.23) гомоморфизм  $\alpha$  индуцирует гомоморфизм

$$\alpha^*: H_d^k(M) \rightarrow H^k(M, \mathfrak{U}) \approx H^k(M).$$

Теорему 1.8 можно уточнить, утверждая, что гомоморфизм  $\alpha^*$  является изоморфизмом.

Покажем, как доказывается теорема 1.8 для одномерных когомологий. Пусть  $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$  — некоторое покрытие. Без ограничения общности будем считать, что множества  $U_\alpha$  и  $U_\alpha \cap U_\beta$  линейно связны. Пусть  $c \in C^1(M, \mathfrak{U})$ ,  $c = \{c_{\alpha\beta}\}$ ,  $dc = 0$ , т. е.  $c_{\alpha\beta} + c_{\beta\gamma} + c_{\gamma\alpha} = 0$  для случая, когда  $U_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset$ . Тогда существуют гладкие функции  $f_\alpha$  на множествах  $U_\alpha$ , удовлетворяющие условию

$$[f_\alpha(x) - f_\beta(x) = c_{\alpha\beta}, \quad x \in U_{\alpha\beta}. \quad (1.24)$$

В самом деле, функции  $f_\alpha$  можно строить последовательно, линейно упорядочив все множества  $U_\alpha$  покрытия  $\mathfrak{U}$ . Если для  $\alpha < \alpha_0$  функции  $f_\alpha$ , удовлетворяющие (1.24), уже построены, то, используя (1.24) для  $\beta = \alpha_0$ , получаем, что функция  $f_{\alpha_0}$  должна однозначно задаваться на подмножестве  $\bigcup_{\alpha < \alpha_0} U_{\alpha, \alpha_0} \subset U_{\alpha_0}$ . Заменяя, если это необходимо,

каждое множество  $U_\alpha$  на меньшее множество  $V_\alpha \subset U_\alpha$ ,  $\bigcup_{\alpha} V_\alpha = M$ , мы можем продолжить функцию  $f_{\alpha_0}$  с множества  $\bigcup_{\alpha < \alpha_0} U_{\alpha, \alpha_0}$  на все множества  $U_{\alpha_0}$ . Таким образом,

мы имеем набор функций  $f_\alpha$ , удовлетворяющих условию (1.24). Пусть  $\omega_\alpha = df_\alpha$ , тогда из (1.24) следует, что  $\omega_\alpha = \omega_\beta$  на  $U_{\alpha\beta}$ , т. е. существует форма  $\omega$  на многообразии  $M$  такая, что  $\omega|_{U_\alpha} = \omega_\alpha$ . Ясно, что  $d\omega = 0$ . Если  $f'_\alpha$  — другой набор функций, удовлетворяющих (1.24), то существует такая гладкая функция на многообразии  $h$ , что  $f'_\alpha = f_\alpha + h$ ,  $x \in U_\alpha$ . Тогда  $\omega' = \omega + dh$ , т. е.  $\omega'$  и  $\omega$  определяют один и тот же элемент в группе  $H^1_d(M)$ .

С другой стороны, если  $\omega \in \Omega_1(M)$  — такая форма, что  $d\omega = 0$ , то в каждой локальной карте  $U_\alpha$ , гомеоморфной евклидову пространству, найдется такая гладкая функция  $f_\alpha$ , что  $df_\alpha = \omega$ . В самом деле, функцию  $f_\alpha$  можно задать с помощью криволинейного интеграла

$$f_\alpha(x) = \int_{x_0}^x \omega, \quad (1.25)$$

причем кривая  $[x_0, x]$  полностью лежит в карте  $U_\alpha$ . Поскольку  $U_\alpha \approx \mathbb{R}^n$ , то интеграл (1.25) не зависит от пути. Тогда разность

$$f_\alpha - f_\beta$$

является постоянной функцией на  $U_{\alpha\beta}$ , равной, скажем,  $c_{\alpha\beta}$ .

Таким образом, мы получим коцепь  $c = \{c_{\alpha\beta}\} \in C^1(M, \mathbb{U})$ ,  $\delta c = 0$ . Мы построили два взаимно обратных отображения групп  $H^1_d(M)$  и  $H^1(M)$ .

Мы привели два различных определения когомологий гладкого многообразия  $M$  с вещественными коэффициентами. Существуют и другие способы определения когомологий, например, с помощью разбиения компактного гладкого многообразия на симплексы. Каждое из определений имеет определенные удобства в различных задачах. В настоящем изложении естественно будут возникать спектральные когомологии и когомологии де Рама. Используя же определение симплициальных когомологий, можно эффективно указать конечный набор интегральных условий для разрешимости уравнения  $d\omega = \Omega$ , где  $\Omega$  — дифференциальная форма размерности  $k$ . Именно, существует такое конечное число подмногообразий  $N_1, \dots, N_s$ ,  $\dim N_i = k$ ,  $1 \leq i \leq s$ , что уравнение

$d\omega = \Omega$  разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\int_{N_i} \Omega = 0, \quad 1 \leq i \leq s.$$

Если многообразие  $M$  разбито на конечное число гладких симплексов, то интегральные условия можно переписать в виде конечного числа равенств

$$\sum_i \lambda_i^k \int_{\sigma_i} \Omega = 0,$$

где  $\sigma_i$  — симплексы размерности  $k$ , а  $\lambda_i^k$  — некоторые числа, не зависящие от формы  $\Omega$ .

В качестве примера вычислим группу одномерных когомологий окружности  $S^1$ . Введем для этого в качестве локальной координаты на  $S^1$  угловой параметр  $\varphi$ . Тогда всякая одномерная форма  $\omega$  имеет вид  $\omega = f(\varphi) d\varphi$ , причем функция  $f(\varphi)$  должна быть функцией точки на окружности, т. е. периодической,  $f(\varphi) = f(\varphi + 2\pi)$ . Если  $\omega = dg$ , где  $g$  — некоторая функция на окружности  $S^1$ , т. е.  $g(\varphi)$  — периодическая функция,  $g(\varphi) = g(\varphi + 2\pi)$ , то получаем уравнение  $f(\varphi) = \frac{d}{d\varphi} g(\varphi)$  или  $g(\varphi) = g(0) +$

$+\int_0^\varphi f(\tau) d\tau$ . Поскольку  $g$  — периодическая функция, то функция  $f$  должна удовлетворять условию

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0.$$

Всякая периодическая функция  $f(\varphi)$  может быть однозначно разложена в сумму  $f(\varphi) = \lambda + h(\varphi)$ , причем  $\int_0^{2\pi} h(\varphi) d\varphi = 0$ ,  $\lambda = \text{const}$ . Тогда форма  $h(\varphi) d\varphi$  принадлежит образу дифференциала  $d$ ,  $h(\varphi) d\varphi \in \text{Im } d$ . Таким образом, каждый класс смежности  $\text{Ker } d / \text{Im } d$  содержит единственную форму вида  $\lambda d\varphi$  с постоянным множителем  $\lambda$ . Следовательно, одномерная группа когомологий окружности  $S^1$  изоморфна группе вещественных чисел  $\mathbb{R}^1$ .



Рассмотрим другой пример — двумерную сферу  $S^2$ . Удобно представить двумерную сферу  $S^2$  в виде пополненной комплексной плоскости. Тогда сферу  $S^2$  можно покрыть двумя картами  $U_1$  и  $U_2$ , каждая из которых гомеоморфна комплексной плоскости  $C^1$  с комплексными координатами  $z$  и  $w$ , связанными соотношением  $z = 1/\bar{w}$ .

Если  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ , то  $x = \frac{u}{u^2 + v^2}$ ,  $y = -\frac{v}{u^2 + v^2}$ .

Рассмотрим произвольную 1-форму  $\omega$  на  $S^2$ , для которой  $d\omega = 0$ . Пусть в картах  $U_1, U_2$  форма  $\omega$  имеет вид  $\omega = P dx + Q dy$ ,  $\omega = \bar{P} du + \bar{Q} dv$ . Поскольку  $d\omega = 0$ , то  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \bar{P}}{\partial v} = \frac{\partial \bar{Q}}{\partial u}$ . Тогда в каждой карте отдельно форму  $\omega$  можно представить в виде полного дифференциала

$$P dx + Q dy = df_1(x, y), \quad \bar{P} du + \bar{Q} dv = df_2(u, v).$$

Для этого следует положить  $f_1(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (P dx + Q dy)$ ,

$f_2(u, v) = \int_{(0,0)}^{(u,v)} (\bar{P} du + \bar{Q} dv)$ , где интегралы берутся по

произвольным гладким кривым, соединяющим точку  $(0, 0)$  с точкой  $(x, y)$  и соответственно точку  $(0, 0)$  с точкой  $(u, v)$ . Пусть  $\varphi$  — такая гладкая функция на сфере  $S^2$ , которая тождественно равна единице в окрестности точки  $(0, 0)$  карты  $U_2$  и имеет компактный носитель в карте  $U_2$ . Тогда в карте  $U_1$  функция  $\varphi$  равна нулю в окрестности точки  $(0, 0)$ . Положим  $g_2 = \varphi f_2$ . Хотя функция  $f_2$  определена всего лишь в карте  $U_2$ , но поскольку функция имеет компактный носитель в карте  $U_2$ , то функцию  $\varphi \cdot f_2$  можно доопределить нулем в точках, не принадлежащих карте  $U_2$ .

Тогда форма  $\omega' = \omega - dg_2$  тождественно равна нулю в окрестности точки  $(0, 0)$  карты  $U_2$ . Следовательно, в карте  $U_1$  форма  $\omega' = P' dx + Q' dy$  тождественно равна нулю вне некоторого круга, т. е. при  $x^2 + y^2 > R^2$  имеем тождества  $P'(x, y) \equiv 0$ ,  $Q'(x, y) \equiv 0$ . Рассмотрим тогда решение уравнения  $dg_1 = \omega'$  в карте  $U_1$ . Ищем решение

$g_1(x, y)$  в виде

$$g_1(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (P'(x, y) dx + Q'(x, y) dy).$$

Покажем, что при  $x^2 + y^2 \geq R^2$  функция  $g_1$  постоянна, т. е.  $g_1(x, y) \equiv \text{const}$ . В самом деле, значение функции  $g_1(x, y)$  можно вычислять, интегрируя формулу  $\omega'$  по любому пути, соединяющему начальную точку  $(0, 0)$  с точкой  $(x, y)$ . Выберем путь  $\gamma$  следующим образом. Пусть  $\gamma$  составим из трех отрезков  $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ . Путь  $\gamma_1$  является лучом, выходящим из точки  $(0, 0)$  в точку  $(R, 0)$ . Путь  $\gamma_2$  является отрезком прямой, соединяющей точки  $(R, 0)$  и  $(\sqrt{x^2 + y^2}, 0)$ . Путь  $\gamma_3$  является дугой окружности радиуса  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , соединяющей точки  $(\sqrt{x^2 + y^2}, 0)$  и  $(x, y)$  (рис. 6).

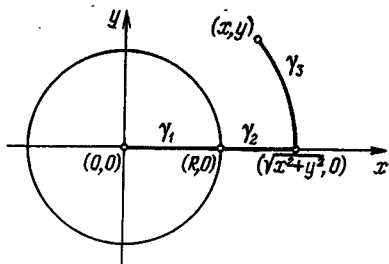


Рис. 6.

Тогда все точки путей  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$  лежат вне круга радиуса  $R$  и поэтому

$$\int_{\gamma_2 \gamma_3} \omega' = \int_{\gamma_2 \gamma_3} (P' dx + Q' dy) = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= \int_{\gamma} (P' dx + Q' dy) = \int_{\gamma_1} (P' dx + Q' dy) + \\ &+ \int_{\gamma_2 \gamma_3} (P' dx + Q' dy) = \int_{\gamma_1} (P' dx + Q' dy) = g_1(R, 0) = \text{const}. \end{aligned}$$

Поскольку функция  $g_1(x, y)$  постоянна вне круга радиуса  $R$  в карте  $U_1$ , то ее можно однозначно доопределить в бесконечно удаленной точке значением, равным этой константе  $g_1(R, 0)$ . Таким образом, функция  $g_1$  постоянна в окрестности точки  $(0, 0)$  в карте  $U_2$ . Следовательно, на всей сфере  $S^2$  выполнено тождество

$$dg_1 \equiv \omega'$$

или

$$\omega = dg_1 + dg_2.$$

Мы доказали, что в одномерных формах на сфере  $S^2$  ядро  $\text{Ker } d$  совпадает с образом  $\text{Im } d$ , т. е.  $H^1(S^2) = 0$ .

Вычислим теперь двумерные когомологии сферы  $S^2$ . Для этого достаточно описать подпространство всех двумерных дифференциальных форм, являющихся образами дифференциала  $d$ . Покажем, что если  $\int_{S^2} \omega = 0$ , то

уравнение  $d\Omega = \omega$  разрешимо для некоторой одномерной формы  $\Omega$  на сфере  $S^2$ . В каждой из карт  $U_1$  и  $U_2$  такое уравнение разрешимо, поскольку форма  $\omega$  имеет вид  $\omega = f(x, y) dx \wedge dy$  и можно положить  $\Omega = P(x, y) dy$ , где  $P(x, y) = \int_0^x f(x, y) dx$ .

Таким образом, в карте  $U_1$  найдется такая одномерная форма  $\Omega_1$ , что  $d\Omega_1 = \omega$ ; аналогично, в карте  $U_2$  найдется такая одномерная форма  $\Omega_2$ , что  $d\Omega_2 = \omega$ . Тогда на пересечении карт  $U_1 \cap U_2$ , которое в координатах  $(x, y)$  представляет собой комплексную плоскость с выколотой точкой  $(0, 0)$ , имеет место равенство  $d(\Omega_1 - \Omega_2) = 0$ . Рассмотрим замкнутую кривую  $\Gamma$  — окружность  $x^2 + y^2 = R^2$ . Тогда

$$\int_{\Gamma} \Omega_1 = \int_{x^2+y^2 \leq R^2} d\Omega_1, \quad \int_{\Gamma} \Omega_2 = - \int_{x^2+y^2 \geq R^2} d\Omega_2.$$

Следовательно,

$$\int_{\Gamma} (\Omega_1 - \Omega_2) = \int_{U_1} \omega = \int_{S^2} \omega = 0.$$

Таким образом, интеграл формы  $\Omega_1 - \Omega_2$  по любой замкнутой кривой, лежащей в  $U_1 \cap U_2$ , равен нулю. Следовательно, в пересечении  $U_1 \cap U_2$  разрешимо уравнение  $d\tilde{f} = \Omega_1 - \Omega_2$ .

Рассмотрим гладкую функцию  $g$  в карте  $U_1$ , равную нулю в окрестности точки  $(0, 0)$  и единице вне круга радиуса  $R$ . Тогда функция  $h = g\tilde{f}$  может быть доопределена в точке  $(0, 0)$  до гладкой функции в карте  $U_1$ . Положим  $\Omega_1' = \Omega_1 - dh$ . Тогда  $d\Omega_1' = \omega$  в карте  $U_1$  и  $\Omega_1' \equiv \Omega_2$  в карте  $U_1$  при  $x^2 + y^2 \geq R^2$ . Следовательно, форма  $\Omega_1'$ .

может быть продолжена на всю сферу  $S^2$  так, чтобы  $d\Omega_1' = \omega$  на сфере  $S^2$ . Таким образом, каждый класс смежности в когомологиях  $H^2(S^2)$  определяется вещественным числом, равным интегралу  $\int_{S^2} \omega$ .

Осталось проверить, что на сфере найдется такая двумерная форма  $\omega$ , что  $\int_{S^2} \omega \neq 0$ . Положим в картах  $U_1$  и  $U_2$

$$\omega' = \frac{dx \wedge dy}{(1+x^2+y^2)^2}, \quad \omega'' = \frac{du \wedge dv}{(1+u^2+v^2)^2}.$$

Нетрудно убедиться, что формы  $\omega'$  и  $\omega''$  совпадают на пересечении карт  $U_1 \cap U_2$ . С другой стороны, поскольку коэффициент  $dx \wedge dy$  формы  $\omega'$  неотрицателен, то  $\int_{U_1} \omega' >$

$> 0$ . Значит, форма  $\omega$ ,  $\omega|_{U_1} = \omega'$ ,  $\omega|_{U_2} = \omega''$ , удовлетворяет всем требованиям. Таким образом, двумерная группа когомологий сферы  $S^2$  изоморфна группе вещественных чисел:  $H^2(S^2) = \mathbb{R}^1$ .

## § 1.2. Теоремы о трансверсальной регулярности

Теоремы о трансверсальной регулярности или, как их ещё называют, теоремы об общем положении основаны на свойствах линейных пространств и их подпространств. Например, если  $V$  — вещественное линейное пространство размерности  $n$ ,  $V_1, V_2$  — два его подпространства размерностей  $p$  и  $q$  соответственно, то при  $p+q > n$  пересечение  $V_1 \cap V_2$  не равно нулю, а размерность  $\dim(V_1 \cap V_2)$  этого пересечения можно оценить снизу числом  $p+q-n$ :

$$\dim(V_1 \cap V_2) \geq p+q-n. \quad (2.1)$$

Более того, при сколь угодно малых сдвигах линейных подпространств  $V_1, V_2$  оценку (2.1) можно превратить в равенство. В этом случае алгебраическая сумма подпространств  $V_1$  и  $V_2$  совпадает со всем пространством  $V$ . Говорят, что два линейных подпространства  $V_1$  и  $V_2$  находятся в общем положении, если

$$V_1 + V_2 = V.$$

Термин «общее положение» оправдан тем обстоятельством, что вложения  $V_1 \subset V_2$ ,  $V_2 \subset V_1$  можно с помощью сколь угодно малых сдвигов превратить в общее положение, причем множество вложений пространств  $V_1$  и  $V_2$  в  $V$ , при которых подпространства  $V_1$  и  $V_2$  находятся в общем положении, образуют всюду плотное открытое множество в пространстве всех вложений, а также в пространстве всех линейных отображений. Другими словами, «подавляющее большинство» вложений обладают тем свойством, что подпространства  $V_1$  и  $V_2$  находятся в общем положении. Оказывается, что для нелинейных гладких отображений можно тоже исследовать вопросы, аналогичные теории общего положения линейных отображений. Для этого достаточно рассматривать линейные аппроксимации гладких нелинейных отображений. Классическим примером является теорема о неявной функции. Мы придадим этой теореме, а также всем понятиям, использующимся в ней, такой инвариантный вид, чтобы ее можно было обобщить на случай произвольных гладких отображений гладких многообразий.

Пусть задано гладкое отображение

$$f: M_1 \rightarrow M_2 \quad (2.2)$$

гладких многообразий, вообще говоря, разных размерностей. Точка  $x \in M_1$  называется регулярной точкой для отображения  $f$ , если дифференциал отображения  $f$

$$df: TM_1 \rightarrow TM_2$$

отображает касательное пространство  $(TM_1)_x$  в точке  $x \in M_1$  на касательное пространство  $(TM_2)_{f(x)}$  в точке  $f(x)$ , т. е. линейное отображение

$$(df)_x: (TM_1)_x \rightarrow (TM_2)_{f(x)}$$

является эпиморфизмом. В локальных системах координат в окрестностях точек  $x$  и  $f(x)$  отображение  $f$  можно изобразить как набор функций

$$y^k = f^k(x^1, \dots, x^n), \quad 1 \leq k \leq m,$$

где  $(x^1, \dots, x^n)$  — локальные координаты многообразия  $M_1$ , а  $(y^1, \dots, y^m)$  — локальные координаты многообразия  $M_2$ . Эпиморфность отображения  $df$  означает, что

ранг матрицы Якоби

$$\left\| \frac{\partial y^k}{\partial x^l} \right\| = \left\| \frac{\partial f^k(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^l} \right\| \quad (2.3)$$

равен  $m$ . Следовательно,  $n \geq m$ , и должен найтись некоторый минор порядка  $m$  матрицы (2.3), отличный от нуля, т. е. координаты  $(x^1, \dots, x^n)$  разбиваются на две группы  $(x^{l_1}, \dots, x^{l_m})$  и  $(x^{l_{m+1}}, \dots, x^{l_n})$ . Совершенно ясно, что набор неявных функций

$$f^k(x^1, \dots, x^n) - y^k = 0$$

удовлетворяет условиям разрешимости теоремы о неявной функции для координат  $(x^{l_1}, \dots, x^{l_m})$ . Назовем точку  $y \in M_2$  *регулярной* точкой для отображения (2.2), если любая точка  $x \in f^{-1}(y)$  является регулярной точкой для отображения (2.2). Теорема о неявной функции в нашей интерпретации может быть сформулирована следующим образом.

**Теорема 2.1.** Пусть  $f: M_1 \rightarrow M_2$  — гладкое отображение гладких многообразий,  $\dim M_1 = n$ ,  $\dim M_2 = m$ , а  $y \in M_2$  — регулярная точка для отображения  $f$ . Тогда прообраз  $f^{-1}(y)$  точки  $y \in M_2$  является гладким многообразием размерности  $(n-m)$ , гладко вложенным в многообразии  $M_1$ .

Более общая ситуация, в которой работает теорема о неявной функции, заключается в следующем. Пусть заданы три многообразия  $M_1$ ,  $M_2$  и  $N$ , гладкое отображение

$$f: M_1 \rightarrow M_2$$

и гладкое вложение

$$\varphi: N \rightarrow M_2.$$

Напомним, что дифференциал  $d\varphi$  является мономорфизмом касательных расслоений

$$d\varphi: TN \rightarrow TM_2.$$

Будем говорить, что отображение  $f$  *трансверсально регулярно вдоль подмногообразия  $N$* , если в каждой точке  $x$  прообраза  $f^{-1}(N)$  композиция гомоморфизмов

$$(TM_1)_x \xrightarrow{df} (TM_2)_{f(x)} \rightarrow (TM_2)_{f(x)} / (TN)_{f(x)} \quad (2.4)$$

является эпиморфизмом. Определение регулярной точки для отображения  $f$  в точности означает, что отображение  $f$  трансверсально регулярно вдоль нульмерного подмногообразия, состоящего из одной точки  $y$ .

Условие (2.4) трансверсальной регулярности отображения  $f$  в локальной системе координат, так же как и в случае регулярной точки, означает невырожденность некоторого минора матрицы Якоби отображения  $f$ . Сама же теорема о неявной функции может быть интерпретирована следующим образом.

**Теорема 2.2.** Пусть  $f: M_1 \rightarrow M_2$  — гладкое отображение гладких многообразий,  $\varphi: N \rightarrow M_2$  — подмногообразие,

$$\dim M_1 = n, \quad \dim M_2 = m, \quad \dim N = k.$$

Если отображение  $f$  трансверсально регулярно вдоль подмногообразия  $N$ , то прообраз  $f^{-1}(N)$  является гладким многообразием размерности  $n - m + k$ , гладко вложенным в многообразие  $M_1$ .

Рассмотрим несколько примеров применения теоремы 2.2.

1. Два подмногообразия в общем положении. Пусть  $\varphi_k: M_k \rightarrow M$ ,  $k=1, 2$ , — два вложения. Если вложение  $\varphi_1$  трансверсально регулярно вдоль подмногообразия  $M_2$ , то будем говорить, что подмногообразия пересекаются трансверсально или что подмногообразия  $M_1$  и  $M_2$  находятся в общем положении. Хотя в приведенном определении вложения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  входят несимметрично, на самом деле вложения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  можно поменять местами. Действительно, прообразы  $\varphi_1^{-1}(M_2)$  и  $\varphi_2^{-1}(M_1)$  совпадают и равны пересечению  $M_1 \cap M_2$ . Условие же трансверсальной регулярности одного вложения вдоль другого подмногообразия эквивалентно следующему симметрическому условию: для каждой точки  $x$ ,  $x \in M_1 \cap M_2$ , выполнено равенство

$$(TM_1)_x + (TM_2)_x = (TM)_x.$$

Тогда пересечение  $M_1 \cap M_2$  на основании теоремы 2.2 является гладким подмногообразием,

$$\dim(M_1 \cap M_2) = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim M.$$

Например, если многообразие  $M$  компактно и  $\dim M = \dim M_1 + \dim M_2$ , то пересечение  $M_1 \cap M_2$  являет-

ся нульмерным компактным многообразием, т. е. состоит из конечного числа точек.

2. Трубочатая окрестность подмногообразия. Пусть  $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$  — вложение, тогда дифференциал  $d\varphi$  является мономорфизмом расслоений

$$d\varphi: TM_1 \rightarrow TM_2,$$

который можно разложить в композицию

$$TM_1 \rightarrow \varphi^* TM_2 \rightarrow TM_2.$$

Фактор-расслоение  $\varphi^* TM_2 / TM_1$  называется *нормальным расслоением* к вложению  $\varphi$  и обозначается через  $\nu(M_1)$  или через  $\nu(M_1 \subset M_2)$ . Термин «нормальное расслоение» оправдан следующим утверждением. Пространство нормального расслоения  $\nu(M_1)$  диффеоморфно некоторой открытой окрестности  $V \subset M_2$ , содержащей подмногообразие  $M_1$ . При этом диффеоморфизм

$$\psi: \nu(M_1) \rightarrow V \subset M_2$$

можно выбрать так, что ограничение  $\psi|_{M_1}$  диффеоморфизма  $\psi$  на нулевое сечение нормального расслоения  $\nu(M_1)$  совпадает с вложением  $\varphi$ , дифференциал  $d\psi$  изоморфно отображает касательное расслоение  $T\nu(M_1)$  к пространству нормального расслоения  $\nu(M_1)$  на касательное расслоение  $TV \subset TM_2$ , а ограничение  $d\psi$  на прямое слагаемое  $TM_1 \subset T\nu(M_1)$  совпадает с дифференциалом  $d\varphi$  вложения  $\varphi$  многообразия  $M_1$  в многообразие  $M_2$ .

Чтобы свести задачу к теореме 2.2, поступим следующим образом. Введем сначала на многообразии  $M_2$  некоторую гладкую риманову метрику, т. е. скалярное произведение в каждом слое касательного расслоения  $TM_2$ . Тогда ограничение  $\varphi^* TM_2$  касательного расслоения  $TM_2$  на подмногообразии  $M_1$  разлагается в ортогональную прямую сумму двух подрасслоений —  $TM_1$  и его ортогонального дополнения  $(TM_1)^\perp$ :

$$\varphi^* TM_2 = TM_1 \oplus (TM_1)^\perp.$$

Непосредственно из определения следует, что нормальное расслоение  $\nu(M_1)$  изоморфно ортогональному дополнению  $(TM_1)^\perp$ :

$$\nu(M_1) \xrightarrow{\cong} (TM_1)^\perp \subset TM_2.$$



Пусть  $x \in M_2$  — произвольная точка. Риманова метрика в многообразии  $M_2$  определяет экспоненциальное отображение касательного пространства  $(TM_2)_x$  в многообразии  $M_2$ :

$$\exp_x: (TM_2)_x \rightarrow M_2,$$

которое отображает каждый луч в пространстве  $(TM_2)_x$  в геодезическую с началом в точке  $x \in M_2$ , а направляющая луча совпадает с касательным вектором к геодезической в точке  $x \in M_2$ . Совершенно очевидно, что дифференциал  $d(\exp_x)$  в начале координат является тождественным отображением. Построим теперь гладкое отображение

$$\psi: \nu(M_1) \rightarrow M_2.$$

Пусть  $\xi \in \nu(M_1)$  — произвольный вектор в точке  $x \in M_1$ . Положим

$$\psi(\xi) = \exp_x(\chi(\xi)).$$

Легко проверить в локальной системе координат, что дифференциал  $d\psi$  отображения  $\psi$  является изоморфизмом для всех нулевых векторов  $\xi \in \nu(M_1)$ . Следовательно, некоторая окрестность  $U \subset \nu(M_1)$  нулевого сечения  $M_1 \subset \nu(M_1)$  диффеоморфно отображается в окрестность  $V \subset M_2$  подмногообразия  $M_1$ .

В частности, если  $M_1 \subset M_2$  — гладкое подмногообразие,  $\dim M_1 = n$ ,  $\dim M_2 = m$ , то для каждой точки  $x_0 \in M_1$  существует такая локальная система координат  $y_1(x), \dots, y_m(x)$ , что многообразие  $M_1$  задается системой уравнений

$$y_{n+1}(x) = 0,$$

$$\dots$$

$$y_m(x) = 0.$$

Рассмотрим, например, в двумерном пространстве  $\mathbb{R}^2$  окружность  $S^1$ , которую мы можем задавать уравнением  $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1) = 0$ . Функция  $f(x, y)$  является отображением двумерного пространства  $\mathbb{R}^2$  в вещественную прямую  $\mathbb{R}^1$ . При этом точка  $0 \in \mathbb{R}^1$  является регулярной точкой, поскольку матрица Якоби функции  $f(x, y)$ , равная  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, 2y)$ , имеет ранг 1 в каждой точке

окружности  $S^1$ . Тогда нормальное расслоение  $\nu(S^1)$  является тривиальным расслоением, равным прообразу касательного расслоения к прямой  $\mathbb{R}^1$  в точке 0. Очевидно, что пространство нормального расслоения  $\nu(S^1)$  диффеоморфно отображается на кольцевую окрестность  $V$  окружности  $S^1$ :

$$V = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 4\},$$

причем одномерный слой нормального расслоения  $\nu(S^1)$  над точкой  $(x_0, y_0)$  окружности диффеоморфно отображается на отрезок луча, проходящего через точку  $(x_0, y_0)$ :

$$\psi: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \psi(t) = \left( \frac{2}{\pi} x_0 \operatorname{arctg} t, \frac{2}{\pi} y_0 \operatorname{arctg} t \right).$$

Аналогично, нормальное расслоение к двумерной сфере  $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$  диффеоморфно окрестности  $V = \{(x, y, z) : 0 < x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$  и диффеоморфно прямому произведению  $S^2 \times \mathbb{R}^1$ .

Перейдем теперь к формулировке теорем, с помощью которых мы будем отыскивать отображения, трансверсально регулярные вдоль некоторого подмногообразия. Для простоты будем считать все многообразия компактными, хотя это ограничение не является существенным.

Прежде всего введем в пространстве всех отображений многообразия  $M_1$  в многообразие  $M_2$  некоторую метрику

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in M_1} [\rho_1(f(x), g(x)) + \rho_2(df(x), dg(x))], \quad (2.5)$$

где  $\rho_1$  — некоторая метрика на многообразии  $M_2$ , согласованная с топологией многообразия  $M_2$ , а  $\rho_2$  — некоторая метрика в кокасательном расслоении  $T^*M_2$ .

Если  $N \subset M_2$  — подмногообразие в  $M_2$ , а отображение  $f$  трансверсально регулярно вдоль подмногообразия  $N$ , то свойство отображения быть трансверсально регулярным вдоль подмногообразия  $N$  справедливо для всех гладких отображений, достаточно близких к отображению  $f$  в смысле метрики (2.5). В самом деле, в локальной системе координат трансверсальная регулярность — это невырожденность некоторой матрицы, составленной из частных производных отображения  $f$ . Следовательно, у достаточно близкого отображения  $g$  в смысле (2.5)

частные производные отображения  $g$  близки к соответствующим частным производным отображения  $f$ , и, значит, сохраняется невырожденность соответствующей матрицы. Компактность всех многообразий позволяет освободиться от локальной ситуации.

Таким образом, множество всех отображений, трансверсально регулярных вдоль подмногообразия  $N$ , открыто в пространстве всех гладких отображений. Оказывается, что подавляющее большинство отображений обладают свойством трансверсальной регулярности. Точная формулировка приводится в следующей теореме.

**Теорема 2.3 (Том).** *Множество отображений, трансверсально регулярных вдоль подмногообразия  $N$ , всюду плотно в пространстве всех гладких отображений многообразия  $M_1$  в многообразие  $M_2$ .*

В доказательстве теоремы 2.3 существенно другое, более частное утверждение.

**Лемма 2.4 (Сард).** *Пусть  $f: M_1 \rightarrow M_2$  — гладкое отображение. Множество регулярных точек многообразия  $M_2$  для отображения  $f$  является открытым всюду плотным множеством.*

Теорема 2.3 следует из леммы 2.4. В самом деле, утверждение теоремы 2.3 достаточно проверить для таких отображений, для которых свойство трансверсальной регулярности выполняется всего лишь в окрестности одной точки  $y \in N \subset M_2$ . Но тогда как многообразие  $M_2$ , так и его подмногообразие  $N$  можно считать евклидовыми пространствами, причем  $N$  линейно вложено в  $M_2$ . В этом случае, если  $f: M_1 \rightarrow M_2$  — гладкое отображение, то трансверсальная регулярность отображения  $f$  вдоль подмногообразия  $N$  эквивалентна тому, что начало координат в фактор-пространстве  $M_2/N$  является регулярной точкой для композиции отображений

$$g = \pi \circ f: M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_2/N,$$

где  $\pi: M_2 \rightarrow M_2/N$  — проекция.

Если же  $f$  — произвольное гладкое отображение, то, вообще говоря, начало координат  $0 \in M_2/N$  не является регулярной точкой. Пусть  $f(x) = (g(x), h(x))$ ,  $x \in M_1$ . Согласно лемме Сарда в сколь угодно малой окрестности точки  $0 \in M_2/N$  содержится регулярная точка  $y \in M_2/N$ ,  $\|0 - y\| < \varepsilon$ , для отображения  $g$ . Рассмотрим

диффеоморфизм

$$\varphi: M_2/N \rightarrow M_2/N,$$

для которого

$$\varphi(y) = 0, \quad \rho(\varphi, id) \leq 2\varepsilon.$$

Тогда для композиции  $g' = \varphi \circ g$  точка  $0 \in M_2/N$  является регулярной точкой. С другой стороны, отображение  $g'$  разлагается в композицию

$$g' = \pi \circ f',$$

где

$$f'(x) = (g'(x), h(x)), \quad x \in M_2. \quad (2.6)$$

Таким образом, отображение  $f'(x)$  является трансверсально регулярным вдоль подмногообразия  $N$ , а из (2.6) следует, что

$$\rho(f, f') \leq 4\varepsilon.$$

Утверждение теоремы 2.3 Тома можно усилить. Поскольку свойство «отображение  $f$  является трансверсально регулярным вдоль подмногообразия» устойчиво относительно малых деформаций отображения  $f$ , то класс отображений  $f$  можно сузить, наложив на него ряд дополнительных ограничений. Например, можно заранее предположить, что отображение  $f$  уже является трансверсально регулярным вдоль некоторого другого подмногообразия. Так, пусть  $f: M_1 \rightarrow M_2$  — гладкое отображение многообразий с границей,  $f(\partial M_1) \subset \partial M_2$ ,  $\varphi$  — гладкое вложение многообразия  $N$  с границей в  $M_2$ , причем  $\varphi(\partial N) \subset \partial M_2$ , а  $\partial M_2$  и  $N$  находятся в общем положении. Пусть, кроме того, отображение  $f|_{\partial M_1}$  трансверсально регулярно вдоль подмногообразия  $\partial N \subset \partial M_2$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое отображение  $g: M_1 \rightarrow M_2$ , что

а)  $g(x) \equiv f(x)$ , если  $x$  принадлежит некоторой окрестности  $V_1$  границы  $\partial M_1$ ;

б)  $\rho(g, f) < \varepsilon$ ;

в)  $g$  — трансверсально регулярно вдоль подмногообразия  $N$ .

В самом деле, окрестность  $V_2$  границы  $\partial M_2$  представляется в виде прямого произведения  $V_2 = \partial M_2 \times [0, 1)$ , а окрестность  $V$  границы  $\partial N$  — в виде  $V = \partial N \times [0, 1)$ . Поскольку  $\partial M_2$  и  $N$  находятся в общем положении, то касательный вектор  $d/dt$ ,  $t \in [0, 1]$ , к многообразию  $N$

отображается в ненулевой касательный вектор многообразия  $M_2$ . Следовательно, в точке  $y \in \partial M_2 \cap \partial N$  имеет место равенство

$$(T \partial M_2)_y / (T \partial N)_y = (TM_2)_y / (TN)_y.$$

Следовательно, из трансверсальной регулярности отображения  $f|_{\partial M}$  вдоль  $\partial N$  следует трансверсальная регулярность отображения  $f|_{V_1}$  вдоль подмногообразия  $M_1$ . Далее следует применить теорему Тома для изменения отображения  $f$  в тех локальных картах многообразия  $M_1$ , которые не пересекаются с границей  $\partial M_1$ . В качестве следствия из теоремы Тома приведем следующее утверждение. Под *гомотопией отображения*  $f: X \rightarrow Y$  мы будем понимать такое непрерывное отображение

$$F: X \times [0, 1] \rightarrow Y,$$

что  $F(x, 0) = f(x)$ ,  $x \in X$ . Тогда отображения  $F(x, t)$  при фиксированном  $t$  называются *гомотопными отображениями*.

Из теоремы Тома следует, что каждое гладкое отображение

$$f: M_1 \rightarrow M_2$$

гомотопно отображению  $g$ , трансверсально регулярному вдоль наперед заданного подмногообразия  $N \subset M_2$ . При этом можно считать, что гомотопия между  $f$  и  $g$  тоже является гладким отображением.

В теореме 2.3 Тома трансверсально регулярные отображения ищутся в классе всех гладких отображений одного многообразия в другое. Однако бывают случаи, когда мы не можем менять отображение  $f: M_1 \rightarrow M_2$  произвольным образом, но должны оставаться все время в определенном, более узком классе отображений.

Приведем соответствующий пример. Пусть задана гладкая функция  $f$  на гладком многообразии  $M$ . Точка  $x \in M$  называется критической точкой, если  $(df)_x = 0$ . В локальной системе координат это условие означает, что

$$(\text{grad } df)_x = 0 \text{ или что все частные производные } \left\{ \frac{\partial f}{\partial x^k} \right\}$$

обращаются в нуль в точке  $x$ . Критическая точка  $x \in M_2$  функции  $f$  называется невырожденной критической точкой, если матрица  $\text{Hess } f$ , составленная из вторых част-

ных производных, невырождена. Это свойство критической точки не зависит от выбора локальной системы координат. Гладкая функция  $f$  на гладком многообразии называется функцией Морса, если все ее критические точки невырождены. Функции Морса мы будем исследовать при изучении интегралов от быстро осциллирующих функций.

Попытаемся с помощью теоремы Тома выяснить вопрос, как велик запас функций Морса на гладком многообразии  $M$ . Прежде всего, нам нужно свойство функции  $f$  быть функцией Морса выразить через свойство трансверсальной регулярности. Оказывается, если дифференциальную форму  $df$  понимать как сечение в кокасательном расслоении

$$df: M \rightarrow (TM)^*, \quad (2.7)$$

то функция  $f$  является функцией Морса тогда и только тогда, когда отображение (2.7) трансверсально регулярно вдоль нулевого сечения  $M_0 \subset (TM)^*$ . Таким образом, если бы мы захотели применить теорему Тома, то единственное, что можно из этой теоремы получить, заключается в существовании сколь угодно близкого к  $df$  отображения

$$g: M \rightarrow (TM)^*, \quad (2.8)$$

трансверсально регулярного вдоль нулевого сечения  $M_0$ . Однако отображение  $g$ , вообще говоря, не является дифференциалом какой-либо функции на многообразии  $M$ . Следовательно, нам нужно искать трансверсально регулярные отображения не в классе всех гладких отображений (2.8), а в более узком классе отображений вида (2.7).

Общую задачу мы сформулируем следующим образом. Пусть задано некоторое множество  $F$  гладких отображений многообразия  $M_1$  в многообразие  $M_2$ . Требуется найти такое условие на множество  $F$ , чтобы отображения из  $F$ , являющиеся трансверсально регулярными вдоль фиксированного подмногообразия  $N \subset M_2$ , образовывали в  $F$  всюду плотное множество.

Множество отображений  $F$  мы организуем в виде одного отображения

$$A: F \times M_1 \rightarrow M_2,$$

так что индивидуальное отображение  $f$  получается как ограничение отображения  $A$  на  $f \times M_1$ :

$$f(x) = A(f, x).$$

При таком изображении не исключается произвольная параметризация множества  $F$ .

Известны достаточные условия для того, чтобы множество  $F' \subset F$  трансверсально регулярных отображений вдоль подмногообразия  $N \subset M_2$  было всюду плотным множеством в  $F$  (теорема Абрахама). Мы приведем частный случай теоремы Абрахама, когда множество  $F$  является конечномерным гладким многообразием.

**Теорема 2.5 (Абрахам).** Пусть  $F, M_1, M_2$  — гладкие многообразия,  $N \subset M_2$  — подмногообразие,

$$A: F \times M_1 \rightarrow M_2$$

— гладкое отображение, трансверсально регулярное вдоль подмногообразия  $N$ . Обозначим через  $F' \subset F$  подмножество тех точек, для которых отображение

$$f(x) = A(f, x), \quad f \in F',$$

является трансверсально регулярным вдоль подмногообразия  $N$ . Тогда множество  $F'$  плотно в  $F$ .

Выведем теорему 2.5 из леммы Сарда. Поскольку отображение  $A$  является трансверсально регулярным вдоль подмногообразия  $N \subset M_2$ , то прообраз  $W = A^{-1}(N)$  является гладким многообразием. Пусть  $f \in F'$ . Условие трансверсальной регулярности отображения  $f$  вдоль подмногообразия  $N$  означает, что в каждой точке  $(f, x) \in W \cap (f \times M_1)$  дифференциал  $dA$  отображения  $A$  отображает касательное пространство  $(T(f \times M_1))_{(f, x)}$  в касательное пространство  $(TM_2)_{A(f, x)}$  таким образом, что

$$DA((T(f \times M_1))_{(f, x)} + (TN)_{A(f, x)}) = (TM_2)_{A(f, x)}. \quad (2.9)$$

Условие же трансверсальной регулярности всего отображения  $A$  в этой же точке  $(f, x)$  означает, что

$$DA((T(F \times M_1))_{(f, x)} + (TN)_{A(f, x)}) = (TM_2)_{A(f, x)}.$$

Касательное пространство  $T(F \times M_1)_{(f, x)}$  распадается в прямую сумму двух подпространств:

$$T(F \times M_1)_{(f, x)} = (TW)_{(f, x)} \oplus v(W)_{(f, x)},$$

причем  $DA$  отображает подпространство  $(\nu(M))_{(f,x)}$  изоморфно на  $(\nu(N))_{A(f,x)}$ , а подпространство  $(TW)_{(f,x)}$  в  $(TN)_{A(f,x)}$ .

Покажем, что

$$T(f \times M_1)_{(f,x)} + (TW)_{(f,x)} = T(F \times M_1)_{(f,x)}.$$

В самом деле, если  $\xi \in T(F \times M_1)_{(f,x)}$ , то

$$\xi = \xi_1 + \xi_2, \quad \xi_1 \in (TW)_{(f,x)}, \quad \xi_2 \in (\nu(M))_{(f,x)}.$$

Тогда  $DA(\xi_2) \in (\nu(N))_{A(f,x)}$  и согласно (2.9) представляется в виде

$$DA(\xi_2) = D(A)(\eta_1) + \eta_2,$$

$$\eta_1 \in (T(f \times M_1))_{(f,x)}, \quad \eta_2 \in (TN)_{A(f,x)}.$$

Рассмотрим вектор  $\xi' = \xi_1 + \eta_1$ . Имеем  $DA(\xi - \xi') = DA(\xi_2 - \eta_1) = \eta_2 \in (TN)_{A(f,x)}$ . Тогда  $\xi'' = \xi - \xi' \in (TW)_{(f,x)}$ . Таким образом,  $\xi = \xi_1 + \eta_1 + \xi''$ , причем  $\eta_1 \in (T(f \times M_1))_{(f,x)}$ ,  $\xi_1 + \xi'' \in (TW)_{(f,x)}$ . Итак, мы установили, что  $f \in F^i$  тогда и только тогда, когда подмногообразие  $W$  и  $f \times M_1$  находятся в общем положении. Это условие в точности эквивалентно следующему условию:  $f \in F^i$  тогда и только тогда, когда точка  $f \in F$  является регулярной точкой для отображения

$$\pi|_W: W \rightarrow F, \quad (2.10)$$

где  $\pi: F \times M_1 \rightarrow F$  — проекция. Согласно лемме Сарда множество  $F^i$  регулярных точек для отображения (2.10) всюду плотно в пространстве  $F$ . Теорема 2.5 полностью доказана.

Теорема 2.5 является частным случаем теоремы Абрахама, формулировка последней отличается от формулировки теоремы 2.5 только тем, что в качестве пространства параметров  $F$  берется бесконечномерное банахово многообразие. Но на практике, как правило, достаточно рассматривать только конечномерные семейства отображений, удовлетворяющих условиям теоремы Абрахама.

Например, в случае отыскания функций Морса достаточно исходную гладкую функцию  $f$  на многообразии  $M$  включать в конечномерное семейство функций  $f_t$ ,  $t \in T$ , так, чтобы дифференциал функции  $F(x, t) = f_t(x)$  был



трансверсально регулярным вдоль нулевого сечения. В локальной системе координат в качестве такого семейства следует выбрать семейство

$$f_t(x) = f(x) + \sum_{k=0}^n t_k x^k,$$

$$x = (x^1, \dots, x^n), \quad t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_n.$$

Совершенно очевидно, что дифференциал отображения

$$Df_t: M \times \mathbb{R}^n \rightarrow (TM)^*$$

трансверсально регулярен вдоль нулевого сечения  $M_0 \subset (TM)^*$ , поскольку в стационарных точках  $x \in M$  отображение  $Df_t$  линейно на  $(x \times \mathbb{R}^n)$ .

Приведем теперь одно замечательное свойство функций Морса на многообразии  $M$ .

**Предложение 2.6.** Пусть точка  $x_0 \in M$  гладкого  $n$ -мерного многообразия  $M$  является невырожденной критической точкой функции Морса  $f$ . Тогда в окрестности точки  $x_0 \in M$  существуют такие локальные координаты  $(x^1, \dots, x^n)$ , что в этих локальных координатах функция  $f$  имеет вид

$$\begin{aligned} f(x^1, \dots, x^n) = \\ = f(x_0) + (x^1)^2 + \dots + (x^k)^2 - (x^{k+1})^2 - \dots - (x^n)^2. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Достаточно сразу считать, что функция  $f$  является функцией от  $n$  независимых переменных  $(y^1, \dots, y^n)$ , причем точка  $(0, \dots, 0)$  является невырожденной критической точкой функции  $f$ . Это значит, что частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x^k}(0, \dots, 0)$  равны нулю.

Рассмотрим матрицу  $\text{Hess } f$  вторых частных производных функции  $f$  в точке  $(0, \dots, 0)$ . Поскольку матрица  $\text{Hess } f$  невырождена и меняется при линейных заменах координат как матрица квадратичной формы, то существует такая линейная замена координат, что в новых координатах матрица  $\text{Hess } f$  является диагональной матрицей, на диагонали которой стоят числа  $\neq 0$ . Новые координаты мы снова будем обозначать через  $(y^1, \dots$

$\dots, y^n$ ). Рассмотрим разложение функции  $f(y^1, \dots, y^n)$  по формуле Тейлора в виде

$$f(y^1, \dots, y^n) = f(0) + \sum y^i y^j h_{ij}(y^1, \dots, y^n), \quad h_{ij} = h_{ji}.$$

Тогда  $h_{11}(0, \dots, 0) \neq 0$ . Следовательно, если  $h_{11}(0, \dots, 0) > 0$ , то можно ввести новые координаты

$$z^1 = y^1 \sqrt{h_{11}(y^1, \dots, y^n)} + \sum_{k \geq 2} y^k \frac{h_{1k}(y^1, \dots, y^n)}{\sqrt{h_{11}(y^1, \dots, y^n)}},$$

$$z^2 = y^2, \dots, z^n = y^n.$$

Тогда

$$f(z^1, \dots, z^n) = f(0) + (z^1)^2 + \sum_{i, j \geq 2} z^i z^j h_{ij}(z^1, \dots, z^n).$$

Если  $h_{11}(0, \dots, 0) < 0$ , то полагаем

$$z^1 = y^1 \sqrt{-h_{11}(y^1, \dots, y^n)} - \sum_{k \geq 2} y^k \frac{h_{1k}(y^1, \dots, y^n)}{\sqrt{h_{11}(y^1, \dots, y^n)}},$$

$$z^2 = y^2, \dots, z^n = y^n.$$

Тогда

$$f(z^1, \dots, z^n) = f(0) - (z^1)^2 + \sum_{i, j \geq 2} z^i z^j h_{ij}(z^1, \dots, z^n).$$

В обоих случаях процесс замены координат можно провести по индукции. Предложение 2.6 доказано.

Как следствие из предложения 2.6, мы получаем, что каждая невырожденная критическая точка функции  $f$  изолирована. В самом деле, поскольку в окрестности невырожденной критической точки  $x_0$  функция  $f$  имеет вид

$$f(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n \pm (x^i)^2 \text{ в некоторой системе координат,}$$

то обращение в нуль одновременно всех частных производных возможно только в точке  $x^1 = x^2 = \dots = x^n = 0$ . Таким образом, в целой окрестности точки  $x_0$  других критических точек нет. Следовательно, на компактном многообразии  $M$  функция Морса  $f$  может иметь только конечное число критических точек.

### § 1.3. Индекс пересечения подмногообразий

В предыдущем параграфе в качестве примера рассматривалась ситуация двух подмногообразий в общем положении. Пусть  $\varphi_k: M_k \rightarrow M$ ,  $k=1, 2$ , — два подмногообразия в общем положении, т. е. каждое вложение  $\varphi_k$

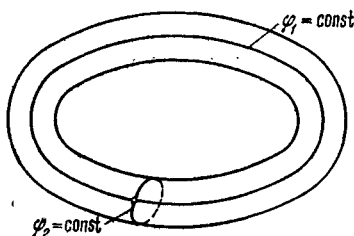


Рис. 7.

является трансверсально регулярным вдоль другого подмногообразия. В этом случае пересечение  $M_3 = M_1 \cap M_2$  является подмногообразием, размерность которого равна  $\dim M_3 = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim M$ . Если  $\dim M_1 + \dim M_2 = \dim M$ , то размерность пересечения равна нулю, т. е. многообра-

зие  $M_3$  состоит из конечного числа изолированных точек (мы предполагаем компактность одного из многообразий  $M_k$ ).

Число точек пересечения многообразий  $M_1$  и  $M_2$  может служить некоторым инвариантом вложений. Более точно обозначим через  $\text{ind}_2[(M_1, \varphi_1): (M_2, \varphi_2)] \in \mathbb{Z}_2$  число точек пересечения  $M_1 \cap M_2$ , приведенное по модулю 2. Тогда  $\text{ind}_2[(M_1, \varphi_1): (M_2, \varphi_2)]$  зависит только от гомотопических классов вложений, т. е. если  $\varphi'_k$  — другие вложения многообразий  $M_k$ , гомотопные вложениям  $\varphi_k$ ,  $k=1, 2$ , то

$$\text{ind}_2[(M_1, \varphi_1): (M_2, \varphi_2)] = \text{ind}_2[(M_1, \varphi'_1): (M_2, \varphi'_2)].$$

Следовательно, в обозначении  $\text{ind}_2[(M_1, \varphi_1): (M_2, \varphi_2)]$  можно не указывать вложений  $\varphi_1, \varphi_2$  и писать  $\text{ind}_2[M_1: M_2]$ .

Само число точек пересечения не является инвариантом гомотопии.

Рассмотрим в качестве примера двумерный тор  $T^2 = S^1 \times S^1$  с координатами — угловыми параметрами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Будем называть первый угловой параметр  $\varphi_1$  широтой, а второй —  $\varphi_2$  — долготой. Тогда на торе возникает сетка из двух взаимно ортогональных кривых: кривые  $\varphi_1 = \text{const}$  являются окружностями, которые называются параллелями, а кривые  $\varphi_2 = \text{const}$  — окружности, которые называются меридианами (рис. 7).

Каждая параллель пересекается с каждым меридианом ровно в одной точке, причем пересечение трансверсально. Следовательно, индекс пересечения параллели и меридиана равен единице. Если мы произведем деформацию, скажем, меридиана, то число точек пересечения меридиана (точнее, его деформированного образа) с параллелью изменится на четное число точек (рис. 8).

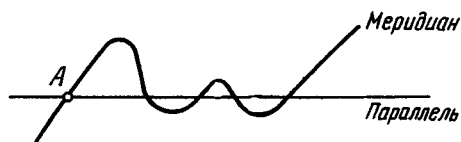


Рис. 8.

В случае, когда меридиан и параллель не находятся в общем положении, число новых точек пересечения может оказаться нечетным, поскольку некоторая пара точек пересечения при деформации может «слиться» в одну точку. На рис. 9 показано, что при деформации меридиана

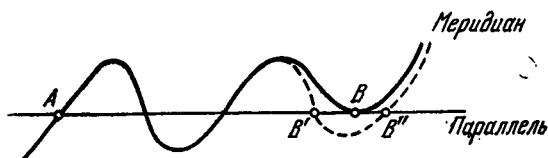


Рис. 9.

пара точек  $B'$  и  $B''$  сливается в одну точку  $B$ . Оказывается, чтобы построить целочисленный индекс пересечения, необходимо уточнить ряд свойств многообразий и их пересечений.

Как было сказано в § 1.1, гладкое многообразие  $M$  называется ориентируемым многообразием, если на  $M$  можно выбрать такой атлас карт  $\{U_\alpha\}$  с локальными координатами  $x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n$  на них, что в любой точке  $x \in U_\alpha \cap U_\beta$  матрица Якоби имеет положительный определитель

$$\det \left\| \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^l} \right\| > 0. \quad (3.1)$$

Атлас карт  $\{U_\alpha\}$ , удовлетворяющий условиям (3.1), называется ориентированным атласом гладкого многообразия  $M$ . Два ориентированных атласа  $\{U_\alpha, x_\alpha^k\}$  и  $\{U_\beta, x_\beta^k\}$  называются эквивалентными, если матрица Якоби замены координат в любой точке  $x \in U_\alpha \cap U_\beta$  имеет положительный определитель

$$\det \left\| \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^j} \right\| > 0,$$

т. е. если объединение атласов  $\{U_\alpha, x_\alpha^k\} \cup \{U_\beta, x_\beta^k\}$  является ориентированным атласом. Тогда все атласы карт, задающие ориентации гладкого многообразия  $M$ , разбиваются на два класса, в каждом из которых атласы карт попарно эквивалентны. Таким образом, на ориентируемом многообразии  $M$  существуют всего две различные ориентации.

Если многообразие  $M$  связно и ориентируемо, то его ориентацию можно задавать еще следующим образом. Фиксируем векторное пространство  $V$  размерности  $n$ . Множество базисов (упорядоченных) разбивается на два класса: два базиса отнесем к одному классу, если матрица перехода от одного базиса к другому имеет положительный определитель. Скажем тогда, что эти два базиса задают в пространстве  $V$  одинаковую ориентацию. Напротив, если матрица перехода от одного базиса к другому имеет отрицательный определитель, то отнесем базисы к разным классам и будем говорить, что базисы задают различные (противоположные) ориентации пространства  $V$ .

Рассмотрим в многообразии  $M$  локальную систему координат  $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$  в карте  $U_\alpha$ . Тогда эта локальная система координат задает в каждом касательном пространстве  $(TM)_x$ ,  $x \in U_\alpha$ , базис  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n} \right\}$  и тем самым некоторую ориентацию пространства  $(TM)_x$ . Ориентированный атлас  $\{U_\alpha, x_\alpha^k\}$  многообразия  $M$  задает в каждом касательном пространстве  $(TM)_x$ ,  $x \in M$ , некоторую ориентацию, не зависящую от карты  $U_\alpha$ , содержащей точку  $x$ .

Обратно, если  $x \in U_\alpha$  и в пространстве  $(TM)_x$  задана ориентация, то по этой ориентации однозначно выбирается локальная система координат  $\{x_\alpha^k\}$  так, чтобы базис  $\left\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}\right\}$  определял исходную ориентацию прост-  
ранства  $(TM)_x$ . Пусть заданы две точки  $x, y \in M$ , непрерывная кривая

$$\varphi: [0, 1] \rightarrow M, \quad \varphi(0) = x, \quad \varphi(1) = y,$$

и два базиса  $(e_1, \dots, e_n) \in (TM)_x$ ,  $(f_1, \dots, f_n) \in (TM)_y$ . Будем говорить, что эти базисы задают согласованные ориентации вдоль кривой  $\varphi$ , если существуют непрерывные семейства базисов

$$\{e_1(t), \dots, e_n(t)\} \in (TM)_{\varphi(t)}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

причем

$$e_k(0) = e_k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

$$e_k(1) = f_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Легко доказать, что для любых двух базисов  $\{e_1, \dots, e_n\} \in (TM)_x$ ,  $\{f_1, \dots, f_n\} \in (TM)_y$  и кривой  $\varphi$  существует такое непрерывное семейство  $\{e_1(t), \dots, e_n(t)\} \in (TM)_{\varphi(t)}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , что  $e_k(0) = e_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , а при  $t=1$  базис  $\{e_k(1)\}$  или совпадает с  $\{f_1, \dots, f_n\}$ , или задает в пространстве  $(TM)_y$  противоположную ориентацию.

Пусть в каждом касательном пространстве  $(TM)_x$ ,  $x \in M$ , задано по базису  $\{e_1(x), \dots, e_n(x)\}$  (непрерывность по параметру  $x \in M$  не предполагается!). Скажем, что эти базисы задают согласованные ориентации, если они задают согласованные ориентации для любой пары точек  $x, y \in M$  и любой непрерывной кривой, соединяющей точки  $x, y$ . Если задан согласованный набор базисов касательных пространств в каждой точке  $x \in M$ , то многообразие  $M$  ориентируемо; при этом базисы  $\left\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}\right\}$ , задаваемые локальными системами

координат в надлежащим образом ориентируемом атласе  $\{U_\alpha, x_\alpha^k\}$ , порождают в каждом касательном пространстве  $(TM)_x$  исходную ориентацию.

Перейдем теперь к изучению индекса пересечения двух ориентированных подмногообразий  $M_1$ ,  $M_2$ , лежащих в общем положении в ориентируемом многообразии  $M$ . Поскольку многообразия  $M_1$  и  $M_2$  находятся в общем положении, то их пересечение  $M_3 = M_1 \cap M_2$  является гладким многообразием. Докажем, что многообразие  $M_3$  ориентируемо. Для этого нам необходимо задать согласованный набор базисов в каждом касательном пространстве  $(TM)_x$ ,  $x \in M_3$ . Мы имеем следующие равенства:

$$(TM_1)_x + (TM_2)_x = (TM)_x,$$

$$(TM_1)_x \cap (TM_2)_x = (TM_3)_x.$$

В пространствах  $(TM)_x$ ,  $(TM_1)_x$ ,  $(TM_2)_x$  уже заданы согласованные ориентации. Фиксируем некоторый базис

$$\{a_1, \dots, a_k\} \in (TM_3)_x. \quad (3.2)$$

Дополним его до базисов

$$\{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_s\} \in (TM_1)_x, \quad (3.3)$$

$$\{a_1, \dots, a_k, c_1, \dots, c_l\} \in (TM_2)_x. \quad (3.4)$$

Тогда векторы

$$\{c_1, \dots, c_l, a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_s\} \quad (3.5)$$

образуют базис пространства  $(TM)_x$ . Предположим, что  $k \neq 0$ ,  $s \neq 0$ ,  $l \neq 0$ .

В общем положении при условии, что многообразия  $M_1$  и  $M_2$  не нульмерны, достаточно предположить, что  $k \neq 0$ , а неравенства  $s \neq 0$ ,  $l \neq 0$  выполняются автоматически. Меняя, если это необходимо, знак у вектора  $b_1$ , мы можем считать, что базис (3.6) согласован с ориентацией многообразия  $M_1$ . Аналогично, меняя знак у вектора  $c_1$ , считаем, что базис (3.4) согласован с ориентацией многообразия  $M_2$ .

Рассмотрим базис (3.5). Если этот базис не согласован с ориентацией многообразия  $M$ , то изменим знак у векторов  $a_1$ ,  $c_1$ ,  $b_1$ . Таким образом, в итоге мы получим такие векторы, что базисы (3.2), (3.4) и (3.5) имеют согласованные ориентации с ориентациями многообразий  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$ . Зададим ориентацию пространства

$(TM_3)_x$  с помощью базиса (3.2). Проверка согласованности базисов (3.2) по различным точкам многообразия  $M_3$  тривиальна.

Рассмотрим теперь случай, когда  $k=0$ , т. е.  $\dim M_3 = 0$ . Тогда многообразие  $M_3$  состоит из отдельных изолированных точек. Хотя формально нульмерное многообразие не имеет ориентации, мы построим на  $M_3$  функцию  $\varepsilon(x)$ ,  $x \in M_3$ , принимающую значения  $\pm 1$ . Рассмотрим базисы (3.3) и (3.4), согласованные с ориентацией многообразий  $M_1$  и  $M_2$  (векторы  $\{a_j\}$  отсутствуют). Тогда положим  $\varepsilon(x) = 1$ , если базис (3.5) согласован с ориентацией многообразия  $M$ ,  $\varepsilon(x) = -1$ , если ориентация базиса противоположна ориентации многообразия  $M$ .

**О п р е д е л е н и е 3.1.** Пусть  $M_1, M_2 \subset M_3$  — два ориентированных подмногообразия в общем положении,

$$M_3 = M_1 \cap M_2, \dim M_3 = 0.$$

Положим

$$\text{ind}[M_2 : M_1] = \sum_{x \in M_3} \varepsilon(x)$$

и назовем это число индексом пересечения.

Легко проверить формулу

$$\text{ind}[M_2 : M_1] = (-1)^{\dim M_1 \dim M_2} \text{ind}[M_1 : M_2].$$

Индекс пересечения для двух подмногообразий  $M_1$  и  $M_2$  в общем положении априори зависит от способа вложения многообразий  $M_1$  и  $M_2$ . В действительности можно избавиться от ряда ограничений на вложения многообразий. Например, если вложения

$$\varphi_k: M_k \rightarrow M, \quad k=1, 2,$$

не находятся в общем положении, то можно поставить и решить вопрос об аппроксимации вложений  $\varphi_k$ ,  $k=1, 2$ , другими вложениями  $\tilde{\varphi}_k$ , которые находятся уже в общем положении, определить индекс пересечения для измененных вложений  $\tilde{\varphi}_k$  и исследовать зависимость индекса пересечения от способа аппроксимации. Первый вопрос решается положительно с помощью теоремы Абрахама. Именно, нам нужно доказать, что в классе вложений многообразия  $M_1$  в  $M$  множество тех вложений, которые находятся в общем положении с подмногообразием  $M_2 \subset M$ , образует плотное множество. Чтобы применить



теорему Абрахама в том виде, как она формулировалась в предыдущем параграфе (теорема 2.5), нужно включить данное вложение  $\varphi_1: M_1 \rightarrow M$  в семейство вложений, параметризованное гладким многообразием  $F$ , причем должны выполняться условия теоремы 2.5. В качестве семейства  $F$  можно взять, например, вложения, построенные следующим образом. Пусть  $G$  — некоторая конечномерная группа диффеоморфизмов многообразия  $M$ . Пусть для этой группы выполнено условие: для любой точки  $x \in M_2 \subset M$  отображение

$$f_x: G \rightarrow M, \quad f_x(g) = g(x), \quad g \in G, \quad (3.6)$$

является трансверсально регулярным отображением вдоль подмногообразия  $M_2 \subset M$ . Рассмотрим отображение

$$A: M_1 \times G \rightarrow M, \\ A(x, g) = g(\varphi_1(x)), \quad x \in M_1, \quad g \in G.$$

Покажем, что отображение  $A$  трансверсально регулярно вдоль подмногообразия  $M_2 \subset M$  в окрестности  $M_1 \times 0 \subset M_1 \times G$ . В самом деле, если  $A(x, 1) = y \in M_2$ , то  $y = \varphi_1(x)$ . Далее,

$$DA(T_1(M_1 \times G)_{(x,1)}) \supset DA(T(x \times G)_{(x,1)}) = Df_y(TG)_1.$$

Следовательно, из трансверсальной регулярности (3.6) следует, что

$$DA(T(M_1 \times G)_{(x,1)}) + (TM_2)_y = (TM)_x.$$

Осталось только построить группу диффеоморфизмов  $G$ .

Рассмотрим нормальное расслоение  $\nu(M_2)$  подмногообразия  $M_2 \subset M$ . Это конечномерное векторное расслоение, и поэтому существует конечное число сечений  $s_1, \dots, s_N$  расслоения  $\nu(M_2)$  таких, что в каждой точке  $x \in M_2$  векторы  $\{s_1(x), \dots, s_N(x)\}$  порождают слой векторного расслоения  $\nu(M_2)$ . Пусть  $\{X_1, \dots, X_N\}$  — такой набор векторных полей на многообразии  $M$ , что ограничение поля  $X_k$  на подмногообразии  $M_2$  совпадает с сечением  $s_k(x)$ . Каждое векторное поле  $X_k$  определяет однопараметрическую группу  $G_k$  диффеоморфизмов многообразия  $M$ , причем, если  $t_k$  — параметр группы  $G_k$ , то касательный вектор к кривой  $y = t_k(x)$ ,  $-\varepsilon \leq t_k \leq \varepsilon$ , в точке  $x$  совпадает с вектором  $X_k(x)$ . Рассмотрим многообразие

$G = \prod_{k=1}^N G_k$ , каждая его точка определяет некоторый диффеоморфизм многообразия  $M_2$ :

$$(t_1, \dots, t_N)(x) = t_1(t_2 \dots (t_N(x)) \dots).$$

Легко установить, что отображения вида (3.6) являются трансверсально регулярными вдоль подмногообразия  $M_2$ .

Таким образом, мы установили, что каждое вложение многообразия  $M_1$  в  $M$  можно сколь угодно близко аппроксимировать трансверсально регулярным вложением вдоль подмногообразия  $M_2$ . Если мы установим, что индекс пересечения не зависит от способа аппроксимации, то тем самым корректно определим индекс пересечения двух подмногообразий, не находящихся в общем положении.

Нам будет более удобным определить индекс пересечения не для вложений, а для произвольных гладких отображений  $\varphi_1$  многообразия  $M_1$  в  $M$ , трансверсально регулярных вдоль подмногообразия  $M_2$ . Если  $\dim M = \dim M_1 + \dim M_2$ , то, как и в случае вложений, прообраз  $\varphi_1^{-1}(M_2)$  состоит из конечного числа точек. В случае ориентированных многообразий  $M, M_1, M_2$  каждой точке  $x$  прообраза  $\varphi_1^{-1}(M_2)$  можно приписать знак  $\varepsilon(x)$ . Если же  $\dim M < \dim M_1 + \dim M_2$ , то прообраз  $\varphi_1^{-1}(M_2)$  снабжается ориентацией, согласованной с ориентацией многообразий  $M, M_1, M_2$ . Таким образом, каждому трансверсально регулярному вдоль подмногообразия  $M_2$  отображению мы можем сопоставить число

$$\text{ind} [\varphi_1: M_2] = \sum_{x \in \varphi_1^{-1}(M_2)} \varepsilon(x).$$

Это число зависит только от гомотопического класса отображения  $\varphi_1$  многообразия  $M_1$ . В самом деле, если  $\varphi_1'$  — другое трансверсально регулярное вдоль подмногообразия  $M_2$  отображение многообразия  $M_1$  и отображения  $\varphi_1$  и  $\varphi_1'$  гомотопны, то существует гладкое отображение

$$F: M_1 \times I \rightarrow M_2,$$

$$F(x, 0) = \varphi_1(x), \quad x \in M_1, \quad (3.7)$$

$$F(x, 1) = \varphi_1'(x), \quad x \in M_1. \quad (3.8)$$

Согласно теореме Тома отображение  $F$  можно выбрать, не меняя условий (3.7), (3.8), трансверсально регулярным вдоль подмногообразия  $M_2$ . Рассмотрим прообраз  $W = F^{-1}(M_2)$ . Многообразие  $W$  одномерно и состоит поэтому из конечного числа отрезков и окружностей (рис. 10).

Граница многообразия  $W$  лежит на границе  $M_1 \times I$ ,  $\partial(M_1 \times I) = (M_1 \times 0) \cup (M_1 \times 1)$ , и равняется объединению прообразов  $\varphi_1^{-1}(M_2) \cup \varphi_1'^{-1}(M_2)$ . Все точки  $\varphi_1^{-1}(M_2) \cup \varphi_1'^{-1}(M_2)$  разбиваются на пары — границы компонент

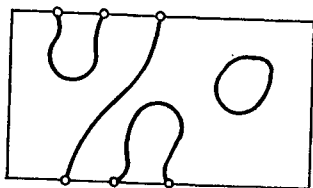


Рис. 10.

связности многообразия  $W$ . Если пара точек  $x_1, x_2$  лежит на одном краю многообразия  $M_1 \times I$ , то  $\varepsilon(x_1) = -\varepsilon(x_2)$ , а если на разных, то  $\varepsilon(x_1) = \varepsilon(x_2)$ . Отсюда следует, что

$$\text{ind} [\varphi_1: M_2] = \text{ind} [\varphi_1': M_2].$$

Нас в дальнейшем будет интересовать только случай, когда  $M_1$  является одномерным связным замкнутым компактным многообразием, т. е. окружностью, а  $M_2$  — многообразие коразмерности 1. Заметим, что многообразие  $M_2$  не обязано являться компактным многообразием, достаточно, чтобы его топологическая граница  $\bar{M}_2 \setminus M_2$  имела коразмерность  $\geq 3$ .

#### § 1.4. Гомотопические группы

Здесь мы кратко сформулируем ряд понятий и теорем, необходимых для конкретных вычислений. Подробное изложение вводимых здесь понятий можно найти в книге Фукса, Фоменко и Гутенмахера [1]. При дальнейшем чтении эти конкретные вычисления можно опустить, оставив только результаты вычислений.

Все пространства предполагаются гомеоморфными конечным симплициальным комплексам. Пространство  $X$  называется *пунктированным*, если в  $X$  отмечена точка  $x_0$ . Отображение  $f$  пунктированных пространств

$$f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$$

должно переводить отмеченную точку  $x_0$  в отмеченную точку  $y_0$ ,  $f(x_0) = y_0$ . Гомотопия  $f_t$  отображений пунктированных пространств должна сохранять отмеченную точку,  $f_t(x_0) = y_0$ .

Множество классов гомотопных отображений  $k$ -мерной сферы  $(S^k, s_0)$  в пространство  $(X, x_0)$  обозначается через  $\pi_k(X, x_0)$ . В множестве  $\pi_k(X, x_0)$  вводится единственным образом групповая структура,  $\pi_k(X, x_0)$  называется  $k$ -мерной гомотопической группой пространства  $(X, x_0)$ . При  $k > 1$  группы  $\pi_k(X, x_0)$  являются абелевыми. Если  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  — отображение пунктированных пространств, то оно индуцирует гомоморфизм гомотопических групп

$$f_k: \pi_k(X, x_0) \rightarrow \pi_k(Y, y_0).$$

Пусть  $p: E \rightarrow Y$  — локально тривиальное расслоение со слоем  $F$ ,  $j: F \subset E$  — вложение,  $x_0 \in F$ ,  $p(x_0) = y_0$ . Тогда существует такой гомоморфизм

$$\partial: \pi_k(Y, y_0) \rightarrow \pi_{k-1}(F, x_0),$$

что последовательность

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\partial} \pi_k(F, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_k(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_k(Y, y_0) \xrightarrow{\partial} \\ \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(F, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_{k-1}(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \dots \end{aligned}$$

точна, т. е. композиция двух последовательных гомоморфизмов равна нулю, а ядро последующего гомоморфизма совпадает с образом предыдущего гомоморфизма.

Пусть теперь  $X$  — симплициальный комплекс,  $C_k(X)$  — свободная абелева группа, порожденная всеми  $k$ -мерными симплексами. Если  $\sigma$  —  $k$ -мерный симплекс с вершинами  $e_0, \dots, e_k$ , то будем писать  $\sigma = (e_0, \dots, e_k)$ . Определим гомоморфизм

$$d: C_k(X) \rightarrow C_{k-1}(X),$$

положив

$$d(e_0, \dots, e_k) = \sum (-1)^j (e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_k).$$

Тогда  $d^2 = 0$  и мы можем определить группы

$$H_k(X) = \text{Ker } d^k / \text{Im } d^k,$$

где

$$\begin{aligned}\text{Ker}^k d &= \{x \in C_k(X) : dx = 0\}, \\ \text{Im}^k d &= d(C_{k+1}(X)).\end{aligned}$$

Имеет место следующее утверждение: если  $\pi_j(X, x_0) = 0$  для  $j < k$ ,  $k > 1$ , то

$$\pi_k(X, x_0) = H_k(X)$$

(теорема Гуревича). Если  $\pi_1(X, x_0)$  — абелева группа, то  $\pi_1(X, x_0) = H_1(X)$  для связного пространства  $X$ . В общем же случае

$$H_1(X) = \pi_1(X, x_0) / [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)],$$

где  $[\pi; \pi]$  обозначает коммутант группы  $\pi$ , т. е. нормальный делитель порожденный элементами вида

$$aba^{-1}b^{-1}; \quad a, b \in \pi.$$

Спектральные когомологии  $H^k(X)$  пространства  $X$  изоморфны группам  $\text{Hom}(H_k(X), \mathbf{R})$ . Последнее утверждение позволяет выяснить, нулевой или ненулевой класс когомологий определяет дифференциальная форма  $\omega \in \Omega_k(M)$  на гладком многообразии. Для этого надо рассмотреть конечное симплициальное разбиение многообразия  $M$ , выбрать (конечный) базис  $(a_1, \dots, a_r)$  в группе  $H_k(M)$ . Пусть  $(b_1, \dots, b_r)$  — представители элементов  $(a_1, \dots, a_r)$ . Тогда каждый элемент  $b_j$  является линейной комбинацией  $k$ -мерных симплексов многообразия  $M$ , так что корректно определены числа

$$\gamma_j = \int_{b_j} \omega.$$

Для того чтобы форма  $\omega$  определяла нулевой класс когомологий, необходимо и достаточно, чтобы

$$\gamma_j = 0, \quad 1 \leq j \leq r.$$

## Г Л А В А II

### ГЕОМЕТРИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЛАГРАНЖЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Основным геометрическим понятием при построении асимптотических решений уравнений с малым параметром с помощью канонического оператора Маслова является понятие лагранжева многообразия в фазовом пространстве. Настоящая глава посвящена систематическому исследованию тех топологических свойств лагранжевых многообразий, которые необходимы при построении канонического оператора.

#### § 2.1. Лагранжевы многообразия в гамильтоновом пространстве

Пусть  $\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$  — вещественное  $2n$ -мерное векторное пространство с отмеченным базисом  $(e, f) = (e_1, \dots, e_n, f^1, \dots, f^n)$ . Пространство  $\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$  будем называть фазовым пространством. Координаты произвольного вектора  $\xi \in \Phi_{\mathbf{R}}(2n)$  мы будем разбивать на две группы:  $x$ -координаты  $(x^1, \dots, x^n)$  и  $p$ -координаты  $(p_1, \dots, p_n)$ :

$$\xi = \sum_{k=1}^n x^k e_k + \sum_{k=1}^n p_k f^k.$$

Рассмотрим в фазовом пространстве  $\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$  внешнюю дифференциальную форму

$$dp \wedge dx = \sum_{k=1}^n dp_k \wedge dx^k. \quad (1.1)$$

Поскольку коэффициенты формы (1.1) постоянны, то в каждой точке  $\xi \in \Phi_{\mathbf{R}}(2n)$  фазового пространства эта

форма индуцирует одну и ту же билинейную кососимметрическую форму  $\langle , \rangle$  на касательном пространстве, которое мы можем отождествить с самим фазовым пространством  $\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$ . Эта билинейная форма в базисе  $(e, f)$  записывается с помощью кососимметрической матрицы  $I_n$ , равной

$$I_n = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

**Определение 1.1.** Пусть  $\varphi: M \rightarrow \Phi_{\mathbf{R}}(2n)$  —  $n$ -мерное подмногообразие в фазовом пространстве. Если ограничение формы (1.1) на подмногообразии  $M$  тождественно равно нулю:

$$\varphi^*(dp \wedge dx) \equiv 0,$$

то многообразие  $M$  называется *лагранжевым многообразием фазового пространства*  $\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$ .

Частным случаем лагранжевых многообразий являются линейные подпространства  $\varphi: L \rightarrow \Phi_{\mathbf{R}}(2n)$ , на которых ограничение формы (1.1) тождественно равно нулю. Такие линейные подпространства, одновременно являющиеся лагранжевыми многообразиями, мы будем называть лагранжевыми плоскостями в фазовом пространстве  $\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$ .

Совершенно очевидно, что  $n$ -мерное подмногообразие  $\varphi: M \rightarrow \Phi_{\mathbf{R}}(2n)$  является лагранжевым многообразием тогда и только тогда, когда все его касательные пространства  $T_m(M)$ ,  $m \in M$ , являются лагранжевыми плоскостями, при вложении  $d\varphi: T_m(M) \rightarrow \Phi_{\mathbf{R}}(2n)$ .

Типичным примером лагранжева многообразия является график градиента гладкой функции переменных  $(x^1, \dots, x^n)$ . Именно, пусть  $S(x^1, \dots, x^n)$  — гладкая функция, определенная в некоторой области  $V$   $n$ -мерного пространства  $\mathbf{R}^n$  с базисом  $e = (e_1, \dots, e_n)$  и координатами  $x = (x^1, \dots, x^n)$ . Рассмотрим вложение

$$\varphi: V \rightarrow \Phi_{\mathbf{R}}^{\sim}(2n),$$

задаваемое равенствами

$$\begin{aligned} x^k &= x^k, & 1 \leq k \leq n, \\ p^k &= \frac{\partial S}{\partial x^k}(x^1, \dots, x^n), & 1 \leq k \leq n. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Тогда подмногообразие  $V$  является лагранжевым многообразием. В самом деле, ограничение  $\varphi^*(dp \wedge dx)$  формы (1.1) в локальной системе координат  $x = (x^1, \dots, x^n)$  имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi^*(dp \wedge dx) &= \sum_{k=1}^n \left( d \frac{\partial S}{\partial x^k} \wedge dx^k \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial x^k \partial x^l} dx^l \wedge dx^k \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 S}{(dx^k)^2} dx^k \wedge dx^k + \sum_{k \neq l} \frac{\partial^2 S}{\partial x^k \partial x^l} (dx^l \wedge dx^k + dx^k \wedge dx^l) \equiv 0.\end{aligned}$$

В некотором смысле всякое лагранжево многообразие может быть представлено в виде (1.3). Точная формулировка будет приведена ниже под названием леммы о локальных канонических координатах.

Пусть  $I, J$  обозначают некоторые подмножества индексов от 1 до  $n$ ,  $\bar{I}$  обозначает дополнение к  $I$ ,  $\bar{I} = \{1, \dots, n\} - I$ . Обозначим через  $\mathbf{R}^I \times \mathbf{R}_J \subset \Phi_{\mathbf{R}}(2n)$  подпространство порожденное векторами  $\{e_k, k \in I; f^l, l \in J\}$ . Соответственно координаты векторов из  $\mathbf{R}^I \times \mathbf{R}_J$  будем обозначать через  $(x^I, p_J)$ . Пусть

$$P_J^I: \Phi_{\mathbf{R}}(2n) \rightarrow \mathbf{R}^I \times \mathbf{R}_J$$

обозначает проекцию фазового пространства  $\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$  вдоль дополнительного подпространства  $\mathbf{R}^{\bar{I}} \times \mathbf{R}_{\bar{J}}$ . Из теоремы о неявных функциях следует, что для подмногообразия  $\varphi: M \rightarrow \Phi_{\mathbf{R}}(2n)$  координаты  $(x^I, p_J)$  служат локальной системой координат для многообразия  $M$  в окрестности точки  $m \in M$  тогда и только тогда, когда проекция

$$P_J^I: T_m(M) \rightarrow \mathbf{R}^I \times \mathbf{R}_J$$

является изоморфизмом. Эти же координаты  $(x^I, p_J)$  являются системой координат (линейной) и для самого касательного пространства  $T_m(M)$ .

**Лемма 1.1** (лемма о локальной канонической системе координат). Для любой лагранжевой плоскости  $\varphi: L \subset \Phi_{\mathbf{R}}(2n)$  существует такой набор индексов  $I$ , что



проекция

$$P_I^I: L \rightarrow \mathbf{R}^I \times \mathbf{R}_{\bar{I}}$$

является изоморфизмом, т. е. координаты  $(x^I, p_{\bar{I}})$  образуют систему координат плоскости  $L$ .

Доказательство. Рассмотрим проекцию

$$P^n: \Phi_{\mathbf{R}}(2n) \rightarrow \mathbf{R}^n;$$

здесь  $n$  обозначает множество всех индексов  $(1, \dots, n)$ . Пусть  $L' = P^n(L)$  — линейное подпространство в  $\mathbf{R}^n$ ,  $\dim L' \leq \dim L$ . Совершенно очевидно, что

$$L = L' \oplus L'', \quad L'' = \text{Ker } P^n, \quad L' \subset \mathbf{R}^n.$$

Пусть  $I$  — такой набор индексов, что проекция

$$P^I: L' \rightarrow \mathbf{R}^I$$

является изоморфизмом. Покажем, что тогда проекция

$$P_I^I: L \rightarrow \mathbf{R}^I \times \mathbf{R}_{\bar{I}}$$

тоже является изоморфизмом. Для этого достаточно показать, что  $\text{Ker}(P_I^I)|_L = 0$ , поскольку

$$n = \dim L = \dim \mathbf{R}^I + \dim \mathbf{R}_{\bar{I}}.$$

Пусть  $\xi \in L$  — такой вектор, что

$$P_I^I(\xi) = 0.$$

Тогда координаты вектора  $\xi$  имеют вид  $\xi = (0, x^{\bar{I}}, p_I, 0)$  в разложении  $\Phi_{\mathbf{R}}(2n) = \mathbf{R}^I \times \mathbf{R}^{\bar{I}} \times \mathbf{R}_I \times \mathbf{R}_{\bar{I}}$ . В частности,  $P^I(\xi) = 0$ , т. е.  $P^n(\xi) = 0$ . Следовательно,  $\xi \in L'' \subset \mathbf{R}_I$ , т. е.  $x^{\bar{I}} = 0$ . Таким образом,  $\xi = (0, 0, p_I, 0)$ . Поскольку проекция  $P^I: L \rightarrow \mathbf{R}^I$  — эпиморфизм, то для любого набора координат  $x^I$  найдется такой вектор  $\eta$ , что  $P^I(\eta) = x^I$ . Тогда  $\eta = (x^I, x^{\bar{I}}, p_I, p_{\bar{I}})$ . Вычислим значение билинейной формы  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  на паре векторов  $\xi, \eta$  (см. (1.2)):

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{k \in I} p_k x^k.$$

Поскольку для лагранжевой плоскости  $L$  значение  $\langle \xi, \eta \rangle$  тождественно равняется нулю, мы получаем тождество

$$\sum_{k \in I} p_k x^k \equiv 0$$

по переменным  $x^k$ , откуда следует, что  $p_k = 0$ ,  $k \in I$ . Таким образом,  $\xi = 0$ , т. е.  $\text{Ker } P_I^I = 0$ . Лемма 1.1 доказана.

Из леммы 1.1 следует, что для любого лагранжева многообразия  $\varphi: M \rightarrow \Phi_{\mathbf{R}}(2n)$  и любой его точки  $m \in M$  найдется такая окрестность  $U \ni m$  и такой набор индексов  $I$ , что в качестве локальной системы координат могут служить функции  $(x^I, p_I)$  — координаты точки  $m$  в фазовом пространстве  $\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$ . Остальные координаты  $(x^{\bar{I}}, p_{\bar{I}})$  точки  $m$  в фазовом пространстве  $\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$ , следовательно, являются функциями от переменных  $(x^I, p_I)$ :

$$\begin{aligned} x^{\bar{I}} &= x^{\bar{I}}(x^I, p_I), \\ p_{\bar{I}} &= p_{\bar{I}}(x^I, p_I). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Карта  $U$ , на которой в качестве локальной системы координат можно взять координаты  $(x^I, p_I)$ , будет называться *канонической картой* и обозначается через  $U_I$ . Тогда из леммы 1.1 следует, что на любом лагранжевом многообразии  $M$  существует атлас  $\{U_I\}$  *канонических карт*.

Аналогично формулам (1.3) попытаемся найти функцию  $S_I(x^I, p_I)$ , удовлетворяющую равенствам

$$\frac{\partial S_I}{\partial x^I} = p_I, \quad \frac{\partial S_I}{\partial p_I} = -x^{\bar{I}}. \quad (1.5)$$

Система (1.5) эквивалентна уравнению в терминах дифференциальных форм

$$dS_I = p_I dx^I - x^{\bar{I}} dp_I. \quad (1.6)$$

Здесь

$$p_I dx^I = \sum_{k \in I} p_k dx^k,$$

$$x^{\bar{I}} dp_{\bar{I}} = \sum_{l \in \bar{I}} x^l dp_l.$$

Левая и правая части (1.6) являются функциями от переменных  $(x^I, p_{\bar{I}})$ . Поскольку в правой части функций  $p_I, x^{\bar{I}}$  взяты из (1.4) как координаты точки  $m$  лагранжева многообразия  $M$ , то, считая функцию  $S$  определенной в окрестности  $U \ni m$  многообразия  $M$ , мы можем рассматривать (1.6) как уравнение на дифференциальные формы на многообразии  $M$  в окрестности  $U$ :

$$dS_I = \varphi^*(p_I dx^I - x^{\bar{I}} dp_{\bar{I}}). \quad (1.7)$$

Форма

$$p_I dx^I - x^{\bar{I}} dp_{\bar{I}} \quad (1.8)$$

уже определена на всем фазовом пространстве  $\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$ . Формы вида (1.8) связаны соотношением

$$p_I dx^I - x^{\bar{I}} dp_{\bar{I}} = p dx - d(p_{\bar{I}} x^{\bar{I}});$$

Поэтому на лагранжевом многообразии  $M$  правая часть (1.7) является замкнутой дифференциальной формой и, следовательно, уравнение (1.7) разрешимо в достаточно малой окрестности  $U$  точки  $m \in M$ . Таким образом, локально каждое лагранжево многообразие может быть представлено в виде (1.5).

Рассмотрим теперь, кроме лагранжева многообразия  $M$  в фазовом пространстве  $\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$ , гладкую функцию  $H(x, p)$  на фазовом пространстве  $\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$ . С каждой такой функцией  $H$  можно связать векторное поле  $V(H)$  на фазовом пространстве  $\Phi_{\mathbf{R}}(2n)$ , двойственное относительно формы  $dp \wedge dx$  к дифференциалу  $dH$ :

$$(dp \wedge dx)(X, V(H)) = dH(X). \quad (1.9)$$

Функция  $H$  называется функцией Гамильтона, а векторное поле  $V(H)$  — гамильтоновым векторным полем. Если

$$V(H) = \sum_k \left( \alpha^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \beta_k \frac{\partial}{\partial p_k} \right),$$

а  $X$  — одно из векторных полей  $\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial p_l}$ , то из (1.9) получаем, что

$$\beta_l = -\frac{\partial H}{\partial x^l}, \quad \alpha^l = \frac{\partial H}{\partial p_l},$$

т. е.

$$V(H) = \sum \frac{\partial H}{\partial p_l} \frac{\partial}{\partial x^l} - \frac{\partial H}{\partial x^l} \frac{\partial}{\partial p_l}.$$

Допустим, что многообразие  $M$  лежит на поверхности уровня функции  $H$ :

$$H|_M \equiv \text{const.}$$

Тогда для любого векторного поля  $X$  на многообразии  $M$

$$dH(X) \equiv 0,$$

т. е. в любой точке  $m \in M$  в касательном пространстве  $L = T_m(M)$  выполнено свойство

$$\langle V(H)_m, X_m \rangle = 0$$

для любого вектора  $X_m \in L$ . Если бы вектор  $V(H)_m$  не принадлежал пространству  $L$ , то в подходящей системе координат билинейная форма  $\langle, \rangle$  определялась бы матрицей, у которой некоторый квадратный ящик  $(n+1) \times (n+1)$  состоял бы из нулевых элементов, т. е. матрица билинейной формы  $\langle, \rangle$  была бы вырождена, что противоречит (1.2). Значит,

$$V(H)_m \in T_m M,$$

т. е. векторное поле  $V(H)$  касается многообразия  $M$  или, что то же самое, многообразие  $M$  инвариантно относительно векторного поля  $V(H)$ .

Обратно, если векторное поле  $V(H)$  касается многообразия  $M$ , то для любого векторного поля  $X$  на лагран-

жевом многообразии  $M$  из (1.9) получаем равенство

$$dH(X) \equiv 0,$$

т. е.  $(dH)_M \equiv 0$ ,  $H|_M \equiv \text{const}$ .

Мы доказали следующее утверждение.

**Лемма 1.2.** *Функция  $H$  постоянна на лагранжевом многообразии  $M$  тогда и только тогда, когда гамильтоново векторное поле  $V(H)$  касается многообразия  $M$ .*

## § 2.2. Когомологии лагранжева грассманиана

Лагранжевы плоскости в фазовом пространстве  $\Phi_R(2n)$  можно организовать в специальное многообразие — лагранжев грассманиан  $G_{2n}^R(I_n)$ . Полезность такого многообразия связана с тем, что всякое лагранжево многообразие  $\varphi: M \rightarrow \Phi_R(2n)$  естественно отображается в лагранжев грассманиан  $G_{2n}^R(I_n)$ . Именно, каждой точке  $m \in M$  следует сопоставить его касательное пространство  $T_m(M) \in G_{2n}^R(I_n)$ . Полученное таким образом отображение  $M \rightarrow G_{2n}^R(I_n)$  помогает яснее объяснить геометрическую природу различных характеристических классов на многообразии, одним из которых является так называемый индекс Маслова — Арнольда лагранжева многообразия  $M$ . Для удобства мы начнем сначала с изучения лагранжева грассманиана комплексного фазового пространства  $\Phi_C(2n)$ .

Пусть  $\Phi_C$  —  $2n$ -мерное комплексное пространство, в котором фиксирован комплексный базис векторов

$$\{e, f\} = \{e_1, \dots, e_n, f^1, \dots, f^n\}.$$

Пространство  $\Phi_C$  назовем *комплексным фазовым пространством*. Всякий вектор  $a \in \Phi_C$  может быть однозначно представлен в виде линейной комбинации базисных векторов  $\{e, f\}$  с комплекснозначными коэффициентами

$$a = \sum_k z^k e_k + \sum_j \xi_j f^j.$$

Числа  $z^k$ ,  $k=1, \dots, n$ , будут называться  *$z$ -координатами*, а числа  $\xi_j$ ,  $j=1, \dots, n$ , —  *$\xi$ -координатами* вектора  $a$  фазового пространства  $\Phi_C$ .

Положим

$$z^k = x^k + iy^k, \quad \zeta_j = p_j + i\eta_j, \quad j, k = 1, \dots, n,$$

где  $x^k, y^k, p_j, \eta_j$  — вещественные числа.

Вещественное линейное подпространство, порожденное векторами  $\{e, f\}$ , образует  $2n$ -мерное вещественное подпространство пространства  $\Phi_{\mathbb{C}}$ . Обозначим его через  $\Phi_{\mathbb{R}}$ . Таким образом, если  $a \in \Phi_{\mathbb{R}}$ , то

$$a = \sum_k x^k e_k + \sum_j p_j f^j.$$

В этом случае числа  $x^k$  будут называться *x-координатами*, а  $p_j$  — *p-координатами* вектора  $a \in \Phi_{\mathbb{R}}$ . В комплексном фазовом пространстве  $\Phi_{\mathbb{C}}$  рассмотрим кососимметрическую комплекснозначную форму  $\langle a, b \rangle$ , задаваемую в базисе  $\{e, f\}$  кососимметрической матрицей

$$I_n = \begin{vmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{vmatrix},$$

где  $E$  — единичная матрица размера  $(n \times n)$ . Более того, положим

$$\langle a, b \rangle = a^t I_n b,$$

где через  $a, b$  мы будем также обозначать столбцы, составленные из координат векторов  $a, b$  в базисе  $\{e, f\}$ ; операция  $X \rightarrow X^t$  является транспонированием комплекснозначных матриц. Таким образом, если

$$a^t = (z^1, \dots, z^n, \zeta_1, \dots, \zeta_n),$$

$$b^t = (z'^1, \dots, z'^n, \zeta'_1, \dots, \zeta'_n),$$

то

$$\langle a, b \rangle = \sum_k z^k \zeta'_k - \sum_j \zeta_j z'^j.$$

Очевидно, что выполнено равенство

$$\langle a, b \rangle = -\langle b, a \rangle.$$

**Определение 2.1.** Комплексное подпространство  $L \subset \Phi_{\mathbb{C}}$  называется *лагранжевой плоскостью*, если

а)  $\dim_{\mathbb{C}} L = n$ ;

б)  $\langle a, b \rangle = 0$  для любой пары векторов  $a, b \in L$ .

**Предложение 2.1.** Пусть  $L \subset \Phi_{\mathbb{C}}$  — лагранжева плоскость,  $\{a_1, \dots, a_n\}$  — произвольный комплексный базис пространства  $L$ ,  $X$  — матрица размера  $(n \times 2n)$ , составленная из координат векторов  $a_1, \dots, a_n$  в базисе  $\{e, f\}$  фазового пространства  $\Phi$ , т. е.  $X = (a_1, \dots, a_n)$ . Тогда

$$X^t I_n X = 0,$$

где  $0$  — нулевая матрица размера  $(n \times n)$ .

Доказательство очевидно.

Примером лагранжевой плоскости может служить подпространство  $\mathbb{C}^n \subset \Phi_{\mathbb{C}}$ , порожденное векторами  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ . В самом деле, векторы  $e_1, \dots, e_n$  образуют базис в пространстве  $\mathbb{C}^n$ , а соответствующая матрица  $X$  их координат имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X^t I_n X = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Пусть  $C: \Phi_{\mathbb{C}} \rightarrow \Phi_{\mathbb{C}}$  — обратимое линейное (комплексное) преобразование фазового пространства  $\Phi_{\mathbb{C}}$ . Соответствующая ему матрица размера  $(2n \times 2n)$  в базисе  $\{e, f\}$  также будет обозначаться через  $C$ .

**Определение 2.2.** Преобразование  $C$  называется симплектическим или гамильтоновым преобразованием, если оно сохраняет кососимметрическую форму, т. е. если

$$\langle a, b \rangle = \langle Ca, Cb \rangle,$$

или, что то же самое, если

$$C^t I_n C = I_n$$

Легко видеть, что если  $L \subset \Phi_{\mathbb{C}}$  — лагранжева плоскость,  $C$  — гамильтоново преобразование, то пространство  $C(L)$  тоже является лагранжевой плоскостью.

Множество всех гамильтоновых преобразований образует группу относительно операции композиции преобразований. Обозначим эту группу через  $GL(2n, I_n)$ .

**Предложение 2.2.** Пусть  $L \subset \Phi_{\mathbb{C}}$  — лагранжева плоскость. Существует такое гамильтоново преобразова-

ние  $C \in GL(2n, I_n)$ , что

$$L = C(C^n).$$

**Доказательство.** Введем на комплексном фазовом пространстве эрмитову метрику, считая базис  $\{e, f\}$  ортонормированным базисом. Таким образом, если векторы  $a, b \in \Phi_C$  имеют координаты

$$(z^1, \dots, z^n, \zeta_1, \dots, \zeta_n), \quad (z^{1'}, \dots, z^{n'}, \zeta_1', \dots, \zeta_n')$$

соответственно, то скалярное произведение их определяется по формуле

$$(a, b) = \sum_k \bar{z}^k z'^k + \sum_j \bar{\zeta}_j \zeta_j'.$$

Пусть теперь  $L \subset \Phi_C$  — произвольная лагранжева плоскость. Тогда существует ортонормированная система векторов  $\{a_1, \dots, a_n\} \subset L$ , образующая комплексный базис пространства  $L$ .

**Л е м м а 2.3.** Пусть комплекснозначная матрица

$$X = \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}$$

размера  $(n \times 2n)$  такова, что ее столбцы определяют ортонормированную систему векторов  $\{h_1, \dots, h_n\}$  пространства  $\Phi_C$ . Тогда

$$A^*A + B^*B = E, \quad (2.1)$$

где  $A^* = \bar{A}^t$ .

Закончим теперь доказательство предложения 2.2. Выберем в пространстве  $L$  ортонормированный базис; пусть координаты этого базиса образуют матрицу

$$X = \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}.$$

Положим

$$C = \begin{Bmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A} \end{Bmatrix}.$$



Тогда

$$\begin{aligned} C^t I C &= \begin{vmatrix} A^t & B^t \\ -\bar{B}^t & \bar{A}^t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} -B^t & A^t \\ -A^* & -B^* \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^t B - B^t A & B^t \bar{B} + A^t \bar{A} \\ -(A^* A + B^* B) & A^* \bar{B} - B^* \bar{A} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Поскольку пространство  $L$  является лагранжевой плоскостью, то согласно предложению 2.2

$$X^t I_n X = 0,$$

или

$$A^t B - B^t A = 0, \quad (2.2)$$

откуда получаем, что

$$A^* \bar{B} - B^* \bar{A} = 0. \quad (2.3)$$

Из (2.1) получаем, что

$$B^t \bar{B} + A^t \bar{A} = E. \quad (2.4)$$

Таким образом, используя равенства (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), получаем

$$C^t I_n C = \begin{vmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{vmatrix} = I_n.$$

Мы установили, что матрица  $C$  определяет гамильтоново преобразование фазового пространства  $\Phi_c$ .

Равенство  $L = C(C_n)$  легко усматривается из определения матрицы  $C$ . Предложение 2.2 доказано.

Предложение 2.2 можно истолковать следующим, полезным для нас, образом. Пусть  $G_{2n}(I_n)$  обозначает множество всех лагранжевых плоскостей в фазовом пространстве  $\Phi_c$ . Тогда получается естественное отображение

$$\theta: GL(2n, I_n) \rightarrow G_{2n}(I_n),$$

которое каждому гамильтонову преобразованию  $C \in GL(2n, I_n)$  сопоставляет лагранжеву плоскость

$$\theta(C) = C(C^n).$$

Предложение 2.2 утверждает, что отображение  $\theta$  является эпиморфизмом. Изучим теперь прообразы отдельных точек при отображении  $\theta$ . Обозначим через  $H$  под-

группу группы  $GL(2n, I_n)$ , состоящую из всех гамильтоновых преобразований  $C$ , переводящих подпространство  $C^n \subset \Phi_C$  в себя:  $C(C^n) = C^n$ .

Подгруппа  $H$  состоит из матриц вида

$$C = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & (A^t)^{-1} \end{pmatrix}, \quad A \in GL(n), \quad (A^{-1}B) = (A^{-1}B)^t.$$

Прообраз каждой точки отображения  $\theta$  совпадает с левым классом смежности группы  $GL(2n, I_n)$  по подгруппе  $H$ , т. е. точки множества  $G_{2n}(I_n)$  находятся во взаимно однозначном соответствии с точками однородного пространства левых классов смежности

$$GL(2n, I_n)/H.$$

Отметим, что в доказательстве предложения 2.2 на самом деле содержится более сильное утверждение. Обозначим через  $U(2n, I_n)$  подгруппу группы  $GL(2n, I_n)$ , состоящую из всех гамильтоновых преобразований, которые одновременно являются унитарными преобразованиями. Если матрица

$$C = \begin{pmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A} \end{pmatrix}$$

определяет гамильтоново преобразование и  $A^*A + B^*B = E$ , то  $C$  является унитарной матрицей.

*Предложение 2.4. Пространство  $G_{2n}(I_n)$  изоморфно однородному пространству левых классов смежности группы  $U(2n, I_n)$  по подгруппе  $H' = H \cap U(2n, I_n)$ . Подгруппа  $H'$  изоморфна группе  $U(n)$  унитарных матриц и состоит из матриц вида*

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}, \quad A \in U(n).$$

**Доказательство.** Первое утверждение очевидно. Пусть унитарная матрица  $C$  имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & (A^t)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Используя условие  $C^*C = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ , получаем  $A^*A = E$ ,  $B = 0$ .

Предложение 2.4 доказано.

Чтобы перейти к вещественному фазовому пространству  $\Phi_R$ , нужно считать, что пространство  $\Phi_R$  является подпространством в  $\Phi_C$ , порожденным базисом  $\{e, f\}$  над полем вещественных чисел. Форма  $\langle, \rangle$  на вещественных векторах, т. е. векторах из подпространства  $\Phi_R$ , принимает вещественные значения.

Определение 2.3. Пусть  $\tau: \Phi_C \rightarrow \Phi_C$  — преобразование, удовлетворяющее условиям  $\tau(e_k) = e_k$ ,  $\tau(f^j) = f^j$ ,  $\tau(\lambda x) = \bar{\lambda} \tau(x)$ .

Лемма 2.5. Если  $L \subset \Phi_C$  — лагранжева плоскость, то  $\tau(L)$  тоже лагранжева плоскость.

Доказательство. Пусть  $x, y \in \Phi_C$ , тогда  $\langle \tau(x), \tau(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ . Следовательно, если  $x, y \in \tau(L)$ , то  $\langle x, y \rangle = \langle \tau^2 x, \tau^2 y \rangle = \langle \tau x, \tau y \rangle = 0$ , поскольку  $\tau x \in L$ .

Определение 2.4. Лагранжева плоскость  $L \subset \Phi_C$  называется вещественной лагранжевой плоскостью, если  $\tau(L) = L$ .

Предложение 2.6. Если  $L \subset \Phi_C$  — вещественная лагранжева плоскость, то

а)  $L \cap \Phi_R = L^\tau$ , где  $L^\tau$  обозначает подпространство неподвижных векторов преобразования  $\tau$ ;

б)  $L \cap \Phi_R$  является лагранжевой плоскостью в  $\Phi_R$ ;

в)  $L = (L \cap \Phi_R) \oplus i(L \cap \Phi_R)$ .

Доказательство. Утверждение а) очевидно. Для доказательства б) достаточно проверить, что  $\dim_R(L \cap \Phi_R) = n$ . Итак, в комплексном векторном пространстве имеется антикомплексная инволюция  $\tau$ . Если  $x \in L^\tau$ , то  $ix \in \overline{L^\tau}$ , ибо  $\tau(ix) = -i\tau x = -ix$ . Следовательно,  $L^\tau \cap iL^\tau = 0$ .

С другой стороны, если  $x \in L$ , то

$$y = \frac{x + \tau x}{2} \in L^\tau, \quad z = \frac{x - \tau x}{2i} \in L^\tau,$$

т. е.  $x = y + iz$ ,  $y, z \in L^\tau$ .

Таким образом,  $L = L^\tau \oplus iL^\tau$ . Мы доказали утверждение в). Поскольку преобразование умножения на число  $i$  обратимо, то

$$\dim_R L^\tau = \dim_R iL^\tau,$$

т. е.

$$\dim_R L = 2 \dim_R L^\tau = 2 \dim_C L = 2n.$$

Итак,  $\dim_{\mathbf{R}} L^{\tau} = n$ . Предложение 2.6 полностью доказано.

**С л е д с т в и е.** Множество лагранжевых плоскостей в вещественном фазовом пространстве  $\Phi_{\mathbf{R}}$  находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством вещественных лагранжевых плоскостей в пространстве  $\Phi_{\mathbf{C}}$ .

Обозначим множество вещественных лагранжевых плоскостей через  $G_n^{\mathbf{R}}(I_n)$ . Как мы установили в предложении 2.4, многообразие лагранжевых плоскостей можно представлять в виде однородного пространства  $U(2n, I_n)/U(n)$ .

Обозначим через  $O(2n, I_n)$  подгруппу  $O(2n, I_n) = U(2n, I_n) \cap O(2n)$ , где  $O(2n)$  — группа ортогональных матриц. Пусть, как и раньше,  $\theta: U(2n, I_n) \rightarrow G_{2n}(I_n)$  — проекция.

**Л е м м а 2.7.**

а)  $\theta(O(2n, I_n)) = G_{2n}^{\mathbf{R}}(I_n)$ ;

б)  $O(2n, I_n) \cap U(n) = O(n)$ ;

в)  $G_{2n}^{\mathbf{R}}(I_n) = O(2n, I_n)/O(n)$ ;

г) группа  $O(2n, I_n)$  изоморфна группе  $U(n)$ , а вложение  $O(n) \subset O(2n, I_n)$  при этом соответствует естественному вложению вещественных матриц в комплексные.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Утверждения а), б), в) мгновенно следуют из предложения 2.6. Докажем утверждение г). Пусть  $C$  — вещественное гамильтоново преобразование,  $C \in O(2n)$ . Условие гамильтоновости означает, что

$$C^* I_n C = I_n.$$

Поскольку  $C \in O(2n)$ , то  $C^* = C^{-1}$ , т. е. соотношение  $C^* I_n C = I_n$  влечет следующее равенство:

$$I_n C = C I_n.$$

Таким образом, всякая матрица  $C \in O(2n, I_n)$  задает ортогональное преобразование пространства  $\Phi_{\mathbf{R}}$ , коммутирующее с преобразованием  $I_n$ . Поскольку преобразование  $I_n$  ортогонально, а  $I_n^2 = -E$ , то на пространстве  $\Phi_{\mathbf{R}}$  можно определить структуру комплексного  $n$ -мерного пространства, полагая

$$(\lambda_1 + i\lambda_2)x = \lambda_1 x + \lambda_2 I_n(x),$$

причем евклидова метрика на  $\Phi_{\mathbb{R}}$  станет эрмитовой метрикой на этом комплексном пространстве. Следовательно, всякое преобразование  $C \in O(2n, I_n)$  является унитарным преобразованием комплексного пространства  $(\Phi_{\mathbb{R}}, I_n)$ . Обратно, если  $C$  — некоторое унитарное преобразование пространства  $(\Phi_{\mathbb{R}}, I_n)$ , то

- а)  $C$  — ортогональное преобразование;
- б)  $CI_n = I_n C$ .

Пусть  $C, I_n$  обозначают матрицы преобразований в пространстве  $\Phi_{\mathbb{R}}$  с базисом  $(e, f)$ . Тогда условие  $CI_n = I_n C$  дает равенство

$$C' I_n C = I_n.$$

Следовательно,  $C \in O(2n, I_n)$ . Чтобы доказать вторую часть утверждения г), необходимо убедиться в том, что если  $C = A + iB$  — матрица комплексного преобразования в базисе  $(e_1, \dots, e_n)$ , то матрица этого же преобразования в базисе  $(e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n)$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Лемма 2.7 полностью доказана.

В дальнейшем нам окажется полезным множество вещественных лагранжевых плоскостей, на которых фиксирована ориентация. Таким образом, точками этого нового множества будут пары  $(L, \varepsilon)$ , где  $L \subset \Phi_{\mathbb{R}}$  — лагранжева плоскость в вещественном фазовом пространстве, а  $\varepsilon$  — некоторая ориентация на пространстве, т. е. класс всех базисов, попарные матрицы переходов для которых имеют положительный детерминант. Обозначим это множество через  $G_{2n}^{SO}(I_n)$ . Забывая об ориентации, мы получим естественное отображение

$$\pi: G_{2n}^{SO}(I_n) \rightarrow G_{2n}^{\mathbb{R}}(I_n),$$

являющееся двулиственным накрытием.

**Л е м м а 2.8.** *Пространство  $G_{2n}^{SO}(I_n)$  гомеоморфно однородному пространству  $U(n)/SO(n)$ , где  $SO(n) \subset O(n)$  — подгруппа ортогональных матриц, с детерминантом, равным 1. При этом коммутативна следующая*

диаграмма расслоений:

$$\begin{array}{ccccc} O(n) & \rightarrow & U(n) & \rightarrow & G_{2n}^R(I_n) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ SO(n) & \rightarrow & U(n) & \rightarrow & G_{2n}^{SO}(I_n) \end{array}$$

Лемма 2.9.  $H^1(G_{2n}^{SO}(I_n)) = \mathbb{Z}$ .

Вычисление одномерной группы когомологий  $H^1(G_{2n}^{SO}(I_n))$  основано на регулярном использовании точных гомотопических последовательностей для расслоений. Прежде всего, необходимо перейти к группам гомологий, используя равенство

$$H^1(G_{2n}^{SO}(I_n)) = \text{Hom}(H_1(G_{2n}^{SO}(I_n)), \mathbb{Z}),$$

и с помощью теоремы Гуревича — к фундаментальной группе  $\pi_1(G_{2n}^{SO}(I_n))$ :

$$H_1(G_{2n}^{SO}(I_n)) = \pi_1(G_{2n}^{SO}(I_n)) / [\pi_1, \pi_1],$$

где  $[\ , \ ]$  — коммутант рассматриваемой фундаментальной группы. Тогда, применяя точную гомотопическую последовательность к нижней строке диаграммы леммы 2.8, получаем следующую последовательность:

$$\pi_1(SO(n)) \rightarrow \pi_1(U(n)) \rightarrow \pi_1(G_{2n}^{SO}(I_n)) \rightarrow \pi_0(SO(n)).$$

Таким образом, необходимо предварительно вычислить фундаментальные группы пространств  $SO(n)$ ,  $U(n)$ , а также заметить, что  $\pi_0(SO(n)) = 0$ .

Для группы  $U(n)$  снова применяем точную гомотопическую последовательность для расслоения

$$U(n-1) \rightarrow U(n) \rightarrow S^{2n-1}.$$

Здесь отображение  $U(n) \rightarrow S^{2n-1}$  сопоставляет каждой унитарной матрице ее первый вектор-столбец. Аналогично, для группы  $SO(n)$  используем расслоение

$$SO(n-1) \rightarrow SO(n) \rightarrow S^{n-1}.$$

Несложные рассуждения показывают, что

$$\begin{aligned} \pi_1(U(1)) &= \dots = \pi_1(U(n)), \\ \pi_1(SO(3)) &= \dots = \pi_1(SO(n)). \end{aligned}$$

Группы  $U(1)$  и  $SO(3)$  легко описываются. Первая является окружностью  $S^1$ , а вторая гомеоморфна трехмерному проективному пространству. Следовательно,

$$\pi_1(U(n)) = \mathbb{Z}, \quad n \geq 1; \quad \pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2, \quad n \geq 3.$$

Кроме того,  $SO(2) = S^1$ ,  $\pi_1(SO(2)) = \mathbb{Z}$ ;  $SO(1) = 1$ ,  $\pi_1(SO(1)) = 0$ .

Отсюда мгновенно получается, что

$$\pi_1(G_{2n}^{SO}(I_n)) = \mathbb{Z},$$

причем естественное вложение

$$G_{2n-2}^{SO}(I_n) \rightarrow G_{2n}^{SO}(I_n)$$

индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. В частности, пространство  $G_2^{SO}(I_1)$  гомеоморфно окружности  $S^1$ .

Полезно описать образующий элемент группы  $H^1(G_{2n}^{SO}(I_n))$  некоторым универсальным способом. Для этого рассмотрим отображение  $\det: U(n) \rightarrow S^1$ . Это отображение разлагается в композицию

$$\begin{array}{ccc} U(n) & \xrightarrow{\det} & S^1 \\ & \searrow & \nearrow \overline{\det} \\ & G_{2n}^{SO}(I_n) & \end{array}$$

Когда  $n=1$ , отображение  $\det$  является гомеоморфизмом, следовательно,

$$\overline{\det}^*: H^1(S^1) \rightarrow H^1(G_{2n}^{SO}(I_n))$$

является изоморфизмом. Таким образом, образующий элемент  $U_n \in H^1(G_{2n}^{SO}(I_n))$  можно представить как прообраз дифференциальной формы  $d\varphi \in H^1(S^1)$ :  $U_n = \overline{\det}^*(d\varphi)$ .

### § 2.3. Характеристические классы лагранжева многообразия

При построении канонического оператора Маслова на лагранжевом многообразии  $\varphi: M \rightarrow \Phi_{\mathbb{R}}(2n)$ , которое будет проведено во второй части, на многообразии накладывается ряд ограничений.

Определение 4.1. Пусть  $\varphi: M \rightarrow \Phi_{\mathbb{R}}(2n)$  — лагранжево многообразие в фазовом пространстве  $\Phi_{\mathbb{R}}(2n)$ ,  $\{U_i\}$  — атлас канонических карт на многообразии  $M$ . Для двух наборов индексов  $I$  и  $J$  введем обозначения:

$$I_1 = I \cap J, \quad I_2 = I \setminus J, \quad I_3 = J \setminus I,$$

$$I_4 = \{1, \dots, n\} \setminus (I \cup J).$$

Лагранжево многообразие  $M$  называется квантованным, если выполнены следующие два условия:

а) В каждой карте  $U_i$  существует функция  $S_i$ , удовлетворяющая уравнению

$$dS_i = p_i dx^i - x^{\bar{j}} dp_{\bar{j}},$$

а на пересечении двух карт  $U_i$  и  $V_j$  выполнено равенство

$$S_i - S_j = p_i x^{I_2} - p_j x^{J_3}. \quad (3.1)$$

б) Существует такой набор целых чисел  $\tau_i$ , занумерованный каноническими картами, что для каждого пересечения  $U_i$  и  $V_j$  выполнено соотношение

$$\tau_i - \tau_j = \text{sign} \frac{\partial(x^{I_2}, -p_{I_3})}{\partial(p_{I_2}, x^{J_3})} \pmod{8}. \quad (3.2)$$

Покажем, что оба условия квантования интерпретируются как соотношения на определенные классы когомологий лагранжева многообразия  $M$ .

Рассмотрим сначала первое условие квантования (3.1). Если на многообразии  $M$  выполнено условие (3.1), то функции

$$\Phi_j = S_j + x^{\bar{j}} p_{\bar{j}}, \quad (3.3)$$

определенные соответственно в картах  $V_j$ , принимают одинаковые значения на попарных пересечениях.



В самом деле, для двух карт  $U_I$  и  $V_J$  имеем

$$\Phi_J = S_J + x^{I_2} p_{I_2} + x^{I_4} p_{I_4},$$

$$\Phi_I = S_I + x^{I_2} p_{I_2} + x^{I_4} p_{I_4}.$$

Тогда

$$\Phi_J - \Phi_I = S_J - S_I + p_{I_2} x^{I_2} - p_{I_2} x^{I_2} \equiv 0.$$

Следовательно, существует общая гладкая функция  $S$  на всем лагранжевом многообразии  $M$ , совпадающая с  $\Phi_I$  в каждой карте  $U_I$ :

$$S|_{U_I} = \Phi_I.$$

Более того,

$$dS = d\Phi_I = p dx. \quad (3.4)$$

Таким образом, если выполнено условие (3.1), то класс когомологий  $[p dx]$ , определяемый одномерной замкнутой дифференциальной формой  $p dx$ , тривиален:

$$[p dx] = 0 \in H^1(M). \quad (3.5)$$

Обратно, если выполнено условие (3.5), то существует гладкая функция  $S$ , удовлетворяющая условию (3.4). Тогда функции  $S_I$  находим по формулам (3.3). Итак, первое условие квантования эквивалентно тривиальности некоторого одномерного класса когомологий  $[p dx] \in H^1(M)$  на лагранжевом многообразии  $M$ .

Перейдем теперь к изучению второго условия квантования (3.2). Прежде всего отметим, что условие (3.2) на языке теории гомологий означает, что одномерная целочисленная коцепь

$$C_{I,J} = \text{sign} \frac{\partial (x^{I_2}, -p_{I_2})}{\partial (p_{I_2}, x^{I_2})}, \quad (3.6)$$

определенная на покрытии каноническими картами  $\{U_I\}$ , является коциклом (mod 8) и когомологична нулю (mod 8). Таким образом, второе условие квантования лагранжева многообразия интерпретируется как тривиальность некоторого одномерного класса когомологий в группе  $H^1(M, \mathbb{Z}_8)$ , называемого индексом лагранжева многообразия.

Значение коцепи (3.6) зависит только от расположения в фазовом пространстве  $\Phi_{\mathbb{R}}(2n)$  касательной лагранжевой плоскости  $T_m(M) \subset \Phi_{\mathbb{R}}(2n)$  в точке  $m \in M$ . Следовательно, коцепь (3.5) является прообразом некоторой универсальной одномерной целочисленной коцепи лагранжева грассманиана  $G_{2n}^{SO}(I_n)$ , заданного на определенном покрытии грассманиана  $G_{2n}^{SO}(I_n)$ . Для этого рассмотрим открытые множества  $W_J \subset G_{2n}^{SO}(I_n)$ , состоящие из тех лагранжевых плоскостей  $L \in G_{2n}^{SO}(I_n)$ , для которых проекция

$$P_J^L: L \rightarrow \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}_J$$

является изоморфизмом. Согласно лемме 1.1 семейство открытых множеств  $\mathfrak{W} = \{W_J\}$  покрывают грассманиан  $G_{2n}^{SO}(I_n)$ :

$$\bigcup W_J = G_{2n}^{SO}(I_n).$$

Определим на покрытии  $\mathfrak{W}$  одномерную целочисленную коцепь

$$a_{I,J} = \text{sign} \frac{\partial(x^{I_2}, -p_{I_2})}{\partial(p_{I_1}, x^{I_1})}, \quad (3.7)$$

которая на каждом пересечении  $W_I \cap W_J$  является локально постоянной функцией. Чтобы функции (3.7) были константами, достаточно заменить покрытие  $\mathfrak{W}$  на другое, более мелкое покрытие. Поэтому мы без ограничения общности можем считать, что (3.7) определяет целочисленную коцепь с постоянными функциями  $a_{I,J}$ . Таким образом,

$$C_{I,J} = \varphi^*(a_{I,J}).$$

Оказывается, коцепь  $a_{I,J}$  является целочисленным коциклом, а определяемый коцепью  $a_{I,J}$  одномерный класс когомологий  $[a_{I,J}] \in H^1(G_{2n}^{SO}(I_n))$  равен четырехкратной образующей группы  $H^1(G_{2n}^{SO}(I_n)) = \mathbb{Z}$ . Тогда одномерный класс когомологий  $[C_{I,J}] \in H^1(M, \mathbb{Z}) \subset \subset H^1(M, \mathbb{R})$  можно представить некоторой замкнутой одномерной дифференциальной формой  $\omega \in \Omega^1(M)$ . Можно написать в явном виде форму и в произвольной локальной системе координат  $(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$  многообразия  $M$ .

Для этого следует по функциям вложения  $x=x(\alpha)$ ,  $p=p(\alpha)$ , многообразия  $M$  в фазовом пространстве построить отображение

$$M \xrightarrow{d\varphi} G_{2n}^{SO} (I_n) \xrightarrow{\overline{\det}} S^1 \subset \mathbb{C}. \quad (3.8)$$

Если  $\alpha=(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$  — локальная система координат, то столбцы матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial p}{\partial \alpha} \end{pmatrix}$$

образуют базис в касательном пространстве  $T_m(M)$  многообразия  $M$ . С помощью линейной замены координат (определяемой некоторой матрицей  $C$ ) этот базис заменим на ортонормированный базис, матрица которого имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & C \\ \frac{\partial p}{\partial \alpha} & C \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица  $\left\| \frac{\partial x}{\partial \alpha} + i \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right\| \cdot C$  является унитарной матрицей, а образ точки  $m \in M$  при отображении (3.8) равен

$$\det \left( \left\| \frac{\partial (x + ip)}{\partial \alpha} \right\| \cdot C \right) \in S^1 \subset \mathbb{C}.$$

Образующий элемент в группе  $H^1(S^1)$  представляется одномерной формой  $\frac{1}{2\pi} d\varphi$ , где  $\varphi$  — аргумент комплексного числа в  $S^1 \subset \mathbb{C}$ . Следовательно,

$$\omega = \frac{4}{2\pi i} d \ln \left( \det \left\| \frac{\partial (x + ip)}{\partial \alpha} \right\| \cdot C \right). \quad (3.9)$$

Чтобы избавиться от неопределенной матрицы  $C$ , заметим, что

$$\left| \det \left\| \frac{\partial (x + ip)}{\partial \alpha} \right\| \cdot C \right| = 1,$$

т. е.

$$\left| \det C \cdot \det \left\| \frac{\partial (x + ip)}{\partial \alpha} \right\| \right| = 1.$$

Поскольку  $\det C > 0$ , то

$$\det C = \left| \det \left\| \frac{\partial (x + ip)}{\partial \alpha} \right\| \right|^{-1}. \quad (3.10)$$

Подставляя (3.10) в (3.9), окончательно получаем

$$\omega = \frac{2}{\pi i} d \ln \left\{ \det \left( \frac{\partial (x + ip)}{\partial \alpha} \right) \cdot \left| \det \left( \frac{\partial (x + ip)}{\partial \alpha} \right) \right|^{-1} \right\}. \quad (3.11)$$

Тогда второе условие квантования можно записать в виде серии соотношений

$$\oint_{\gamma} \omega \equiv 0 \pmod{8}$$

для любого замкнутого контура  $\gamma$  в многообразии  $M$ .Докажем теперь, что целочисленная коцепь (3.7) является целочисленным коциклом. Нужно доказать, что для трех карт  $W_I, W_J, W_K$  выполняется равенство

$$a_{I,J} + a_{J,K} + a_{K,I} = 0. \quad (3.12)$$

В частности, если  $K = \bar{n}$ , необходимо выполнение

$$a_{I,J} + a_{J,\bar{n}} + a_{\bar{n},I} = 0. \quad (3.13)$$

На самом деле, если выполнены равенства (3.13) для любой пары  $W_I, W_J$ , то справедливы все равенства вида (3.12). Для этого заметим, что открытое множество  $W_n$  всюду плотно в пространстве  $G_{2n}^{SO}(I_n)$ . Следовательно, используя (3.13) и подставляя значения коцепи  $a_{I,J}, a_{J,K}, a_{K,I}$  в (3.12), получаем

$$-(a_{J,\bar{n}} + a_{\bar{n},J}) - (a_{K,\bar{n}} + a_{\bar{n},K}) - (a_{I,\bar{n}} + a_{\bar{n},I}) = 0.$$

Таким образом, достаточно доказать (3.13). Имеем

$$a_{I,J} = \text{sign} \frac{\partial (x^{I_2}, -p_{I_2})}{\partial (p_{I_2}, x^{I_2})},$$

$$a_{J,\bar{n}} = \text{sign} \frac{\partial x_J}{\partial p_J}, \quad a_{n,I} = -\text{sign} \frac{\partial p_I}{\partial x^I}.$$

Выберем некоторую лагранжеву плоскость  $L \subset \Phi_{\mathbb{R}}(2n)$  в пересечении  $W_I \cap W_J \cap W_n$ . Поскольку координаты  $x$  являются системой координат для векторов из  $L$ , то мы получаем линейную функцию

$$\begin{pmatrix} p_{I_1} \\ p_{I_2} \\ p_{I_3} \\ p_{I_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{I_1} \\ x^{I_2} \\ x^{I_3} \\ x^{I_4} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Чтобы получить значения  $a_{I,J}$ ,  $a_{J,n}$ ,  $a_{n,I}$ , необходимо произвести в явном виде замены координат. Поскольку значения  $a_{I,J}$  локально постоянны, плоскость  $L$  выбирается произвольным образом в пересечении трех карт, то без ограничения общности мы можем предполагать невырожденность различных миноров из матрицы  $\|p_{ij}\|$  в (3.14). Итак, для вычисления  $a_{I,J}$  необходимо координаты  $(x^{I_1}, x^{I_2}, p_{I_3}, p_{I_4})$  выразить через координаты  $(p_{I_1}, p_{I_2}, x^{I_3}, x^{I_4})$ . После несложных выкладок получаем

$$a_{I,J} = \text{sign} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \begin{vmatrix} Q^{-1} & Q^{-1}(p_{21}p_{11}^{-1}p_{13} - p_{23}) \\ (p_{31}p_{11}^{-1}p_{12} - p_{32})Q^{-1} & (p_{32} - p_{31}p_{11}^{-1}p_{12})Q^{-1}(p_{23} - p_{21}p_{11}^{-1}p_{13}) + \\ & + p_{31}p_{11}^{-1}p_{13} - p_{33} \end{vmatrix} = \\ & = \text{sign} \begin{vmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & p_{31}p_{11}^{-1}p_{13} - p_{33} \end{vmatrix} = \text{sign} \begin{vmatrix} Q & 0 \\ 0 & p_{32}p_{11}^{-1}p_{13} - p_{33} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где  $Q = p_{22} - p_{21}p_{11}^{-1}p_{12}$ . Для вычисления  $a_{J,n}$  необходимо выразить координаты  $(x^{I_1}, x^{I_3}, p_{I_2}, p_{I_4})$  через координаты  $(p_{I_1}, p_{I_3}, x^{I_2}, x^{I_4})$ . Имеем

$$\begin{pmatrix} p_{I_1} \\ p_{I_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{31} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{I_1} \\ x^{I_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{12} & p_{14} \\ p_{32} & p_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{I_2} \\ x^{I_4} \end{pmatrix},$$

т. е.

$$a_{J,n} = \text{sign} \begin{vmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{31} & p_{33} \end{vmatrix}^{-1} = \text{sign} \begin{vmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{31} & p_{33} \end{vmatrix}. \quad (3.15)$$

Для  $a_{n,I}$  получаем

$$a_{n,I} = -\operatorname{sign} \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}. \quad (3.16)$$

Приводя (3.15) и (3.16) к диагональному виду, получаем

$$a_{J,\bar{n}} = \operatorname{sign} (p_{33} - p_{31} p_{11}^{-1} p_{13}) + \operatorname{sign} p_{11},$$

$$a_{\bar{n},I} = -\operatorname{sign} (p_{22} - p_{21} p_{11}^{-1} p_{12}) - \operatorname{sign} p_{11},$$

т. е.  $a_{I,I} + a_{J,\bar{n}} + a_{\bar{n},I} = 0$ .

Поскольку в определении коцикла  $a_{I,J}$  на каждом пересечении  $W_I \cap W_J$  участвуют только те индексы  $l$ , для которых при замене координат координаты  $p_l$  и  $x^l$  меняются местами, то значение коцикла  $a_{I,J}$  не зависит от размерности  $n$  грассманиана  $G_{2n}^{SO}(I_n)$ .

Таким образом, для вычисления класса когомологий  $[a_{I,J}] \in H^1(G_{2n}^{SO}(I_n))$  достаточно вычислить этот класс когомологий при  $n=1$ . При  $n=1$  лагранжев грассманиан  $G_2^{SO}(I_1)$  гомеоморфен окружности  $S^1$ , параметризованной углом

между осью абсцисс в  $\Phi_{\mathbb{R}}(2n) = \mathbb{R}^2$  и прямой — лагранжевой плоскостью, проходящей через начало координат (рис. 11).

Тогда многообразие  $G_2^{SO}(I_1)$  можно покрыть четырьмя картами  $W_k$ ,  $1 \leq k \leq 4$ :

$$W_1 = \{\varphi; 0 < \varphi < \pi\}, \quad W_2 = \left\{\varphi; \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{3\pi}{2}\right\},$$

$$W_3 = \{\varphi; \pi < \varphi < 2\pi\}, \quad W_4 = \left\{\varphi; -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

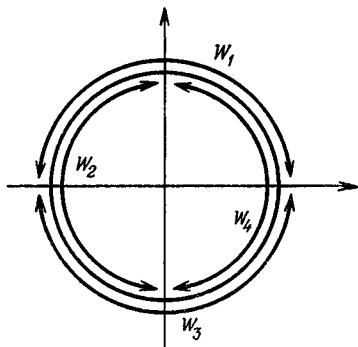


Рис. 11.

Вычислим значение коцикла  $a_{kl}$  по формуле (3.7). Например, в пересечении  $W_1 \cap W_2$  имеем  $I = \{1\}$ ,  $J = \emptyset$ ,  $I_2 = \{1\}$ ,  $I_3 = \emptyset$ . Таким образом, поскольку функция  $x = x(p)$  возрастает в интервале  $W_1 \cap W_2$ , то

$$a_{12} = \text{sign} \frac{\partial x}{\partial p} = 1.$$

Аналогично показывается, что коцикл  $a_{kl}$  принимает следующие значения:

$$a_{12} = 1, \quad a_{23} = 1, \quad a_{34} = 1, \quad a_{41} = 1.$$

Следовательно,  $[a_{kl}] = 4u$ , где  $u \in H^1(S^1)$  — образующий элемент.

Рассмотрим в качестве примера одномерное лагранжево многообразие  $M$  в двумерном фазовом пространстве  $\Phi_R(2)$ , задаваемое уравнением  $x^2 + p^2 = R^2$ . Первое условие квантования эквивалентно тривиальности класса когомологий, определяемого формой  $\Omega = p dx$ . Эта форма определяет ненулевой класс когомологий, поскольку интеграл формы  $\Omega$  по многообразию  $M$  отличен от нуля. В самом деле,

$$\int_M \Omega = \oint_{x^2+p^2=R^2} p dx = \iint_{x^2+p^2 \leq R^2} dp \wedge dx = \pi R^2 \neq 0.$$

Таким образом, первое условие квантования не выполнено.

Второе условие квантования определяется формой  $\omega$  по формуле (3.11).

Имеем

$$\omega = \frac{2}{\pi i} d \ln \left\{ \left| \frac{\partial(x+ip)}{\partial \alpha} \right| \left| \frac{\partial(x+ip)}{\partial \alpha} \right|^{-1} \right\},$$

где  $\alpha$  — угловой параметр окружности

$$x^2 + p^2 = R^2, \quad x = R \cos \alpha, \quad p = R \sin \alpha,$$

$$x + ip = R e^{i\alpha}, \quad \frac{\partial(x+ip)}{\partial \alpha} = i R e^{i\alpha}.$$

Поэтому

$$\omega = \frac{2}{\pi i} d \ln (i R e^{i\alpha} \cdot R^{-1}) = \frac{2}{\pi i} d \ln e^{i\alpha} = \frac{2}{\pi} d\alpha.$$

Следовательно,

$$\oint_M \omega = \oint_M \frac{2}{\pi} d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{2}{\pi} d\alpha = 4 \not\equiv 0 \pmod{8}.$$

Таким образом, второе условие квантования также не выполнено.

## § 2.4. Лагранжево многообразие в общем положении

Приведем другой способ вычисления индекса лагранжева многообразия  $\varphi: M \hookrightarrow \Phi_{\mathbb{R}}(2n)$  в фазовом пространстве с помощью индекса пересечений. Одномерный класс когомологий  $[\omega] \in H^1(M)$ , тривиальность которого обеспечивала выполнение второго условия квантования, полностью определяется своими значениями на одномерных циклах. Оказывается, что для «почти» любого лагранжева многообразия эти значения можно определить как индекс пересечения замкнутой кривой с некоторым подмногообразием  $\Gamma \subset M$  коразмерности 1. Мы уже отмечали в § 1.2, что для вычисления индекса  $\text{ind}[\gamma: \Gamma]$  замкнутой кривой  $\gamma$  с подмногообразием  $\Gamma$  достаточно, чтобы  $\Gamma$  было гладким (не обязательно компактным) многообразием, а его топологическая граница  $\bar{\Gamma} \setminus \Gamma$  имела коразмерность 3 в многообразии  $M$ .

Обозначим через  $[G_{2n}^{SO}(I_n)]^k$  множество всех лагранжевых плоскостей  $L \subset \Phi_{\mathbb{R}}(2n)$ , для которых размерность проекции  $P^n(L) \subset \mathbb{R}^n$  равна  $n - k$ . В частности, при  $k = 0$  мы получаем все лагранжевы плоскости, в которых  $x$ -координаты служат системой координат. Проекция  $P^n$  сопоставляет каждой лагранжевой плоскости  $L \in [G_{2n}^{SO}(I_n)]^k$  ее образ  $P^n(L) - (n - k)$ -мерное подпространство в  $\mathbb{R}^n$ . Таким образом, получаем отображение

$$q: [G_{2n}^{SO}(I_n)]^k \rightarrow G(n, k),$$

где  $G(n, k)$  — многообразие Грассмана  $(n - k)$ -мерных подпространств в  $\mathbb{R}^n$ . Прообраз  $q^{-1}(\xi)$  произвольной точки  $\xi \in G(n, k)$  состоит из всех лагранжевых плоскостей  $L$ ,  $q(L) = \xi$ . Множество  $q^{-1}(\xi)$  можно описать следующим



образом. Пусть  $\varphi: \xi \rightarrow \mathbb{R}^n$  — произвольное линейное отображение, а  $\xi^\perp \subset \mathbb{R}^n$  состоит из всех таких векторов  $x \in \mathbb{R}^n$ , что  $\langle x, \xi \rangle = 0$ ,  $\dim \xi^\perp = k$ . Рассмотрим множество  $\Omega_\xi$  таких отображений  $\varphi$ , чтобы  $\xi^\perp \perp \varphi(\xi)$ . Тогда отображение  $q$  является локально тривиальным расслоением со слоем  $\Omega_\xi$ . Следовательно,  $[G_{2n}^{SO}(I_n)]^k$  является многообразием, размерность которого определяется равенством

$$\dim [G_{2n}^{SO}(I_n)]^k = \dim G(n, k) + \dim \Omega_\xi = \frac{(n-k)(n+k+1)}{2}.$$

В частности,

$$\dim [G_{2n}^{SO}(I_n)] = \frac{(n+1)n}{2},$$

$$\dim [G_{2n}^{SO}(I_n)]^1 = \frac{(n-1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)n}{2} - 1.$$

$$\dim [G_{2n}^{SO}(I_n)] - \dim [G_{2n}^{SO}(I_n)]^k = \frac{k(k+1)}{2} \geq 3 \quad \text{при } k \geq 2.$$

Многообразие  $G_{2n}^{SO}(I_n)$  является ориентируемым многообразием. Действительно, поскольку многообразие  $G_{2n}^{SO}(I_n) = U(n)/SO(n)$ , то достаточно показать, что однородное пространство  $G/H$  левых классов смежности группы Ли  $G$  по связной подгруппе  $H$  является ориентируемым многообразием. В самом деле, пусть  $p: G \rightarrow G/H$  — проекция. Пусть  $g \in G$ ,  $[Hg] = p(g) \in G/H$ ,  $D_p: T_g G \rightarrow T_{p(g)}(G/H)$  — дифференциал отображения  $p$ .

Касательное пространство  $T_p G$  можно представлять как образ  $T_e G$  при правом сдвиге, т. е.  $T_e G = R_g(T_e G)$ . Тогда ядро  $\text{Ker } D_p$  отображения  $p$  в точке  $g \in G$  состоит из векторов  $R_g(T_e H)$ . Пусть  $V \subset T_e G$  — подпространство, дополнительное к подпространству  $T_e H$ ,  $(T_e H) \oplus V = T_e G$ . Тогда  $\text{Ker } p = R_g(T_e H)$  трансверсально к  $R_g(V)$ . Следовательно,  $D_p$  изоморфно отображает  $R_g(V)$  на  $T_{p(g)}(G/H)$ . Требуется только проверить, что если  $p(g) = p(g')$ , то ориентации  $D_p(R_g(V))$  и  $D_p(R_{g'}(V))$  совпадают.

Рассмотрим элемент  $h = g'g^{-1} \in H$ . Тогда  $D_p: T_g G \rightarrow T_{p(g)}(G/H)$  разлагается в композицию

$$T_g G \xrightarrow{L_h} T_g G \xrightarrow{D_p} T_{p(g)}(G/H).$$

Следовательно,  $D_p(R_{g'}(V)) = D_p(L_h R_g V) = D_p(R_{g'} L_h R_{h^{-1}}(V))$ . Таким образом, достаточно проверить, что пространства  $V$  и  $L_h R_{h^{-1}}(V) \subset T_e G$  имеют одинаковую ориентацию после проекции вдоль  $T_e(H)$ . Поскольку группа  $H$  связна, то элемент  $h \in H$  можно соединить непрерывным путем  $h_t$  с единицей, причем ориентация  $L_{h_t} R_{h_t^{-1}}(V)$  при проекции на  $V$  вдоль  $T_e(H)$  не меняется при изменении параметра  $t$ . Поскольку  $h_0 = e$ ,  $L_e = R_e = \text{id}$ , то ориентации пространств  $V$  и  $L_h R_{h^{-1}}(V)$  совпадают, что и требовалось доказать.

Подмногообразие  $\Gamma' = [G_{2n}^{SO}(I_n)]^1$  также является ориентируемым многообразием. Для этого достаточно заметить, что подмногообразие  $[G_{2n}^{SO}(I_n)]^1$  можно представить как множество регулярных точек поверхности нулевого уровня некоторой функции  $f: G_{2n}^{SO}(I_n) \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Функция  $f$  определяется следующим образом. Как уже показывалось, каждую ориентированную лагранжеву плоскость  $L$  можно определить ортонормированным базисом  $\{a_1, \dots, a_n\} \subset L$ , а базис, в свою очередь матрицей координат в фазовом пространстве  $\Phi_{\mathbb{R}}(2n)$ :

$$\{a_1, \dots, a_n\} \rightarrow X = \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}.$$

Если  $\{a'_1, \dots, a'_n\}$  — другой ортонормированный базис в плоскости  $L$  (той же ориентации), а  $X' = \begin{vmatrix} A' \\ B' \end{vmatrix}$  — матрица координат нового базиса, то матрицы  $X$  и  $X'$  связаны соотношением  $X' = XC$ , где  $C$  — ортогональная матрица,  $\det C = 1$ . Тогда положим

$$f(L) = \det A.$$

Функция  $f$  определена корректно, т. е. не зависит от выбора базиса в плоскости  $L$ . Тогда подмногообразие  $[G_{2n}^{SO}(I_n)]^1$  в точности состоит из регулярных точек функции  $f$ , лежащей на поверхности нулевого уровня, т. е.  $f(L) = 0$ ,  $df(L) \neq 0$ . Соответствующую ориентацию на  $\Gamma'$  обозначим через  $\Gamma' \det$ . Однако мы введем на многообразии  $\Gamma' = [G_{2n}^{SO}(I_n)]^1$  ориентацию другим способом. Точнее, ориентируем нормальное одномерное расслоение  $\nu(\Gamma')$  подмногообразия  $\Gamma'$  в  $G_{2n}^{SO}(I_n)$ . Для этого в каждой точке

$L \in \Gamma'$  зададим трансверсальное к  $\Gamma'$  направление в многообразии  $G_{2n}^{SO}(I_n)$ . Пусть  $L \in \Gamma'$  — ориентированная лагранжева плоскость,  $\dim P^n(L) = n - 1$ . Пусть  $f \in L \cap \mathbb{R}_n^p$  — базисный вектор,  $\dim L \cap \mathbb{R}_n^p = 1$ . Пусть  $e \in \mathbb{R}_x^n$  — такой вектор, ортогональный к  $P^n(L)$ , что  $\langle f, e \rangle > 0$ . Если  $L^\perp$  — ортогональное дополнение в плоскости  $L$  к вектору  $f$ , то пространства  $L(t) = L^\perp \oplus \{f + te\}$ ,  $t > 0$ , являются лагранжевыми плоскостями, причем  $P^n(L(t)) = \mathbb{R}_x^n$ . Совершенно очевидно, что семейство  $L(t)$  не зависит от выбора вектора  $f$  и непрерывно зависит от точки  $\Gamma'$ . Таким

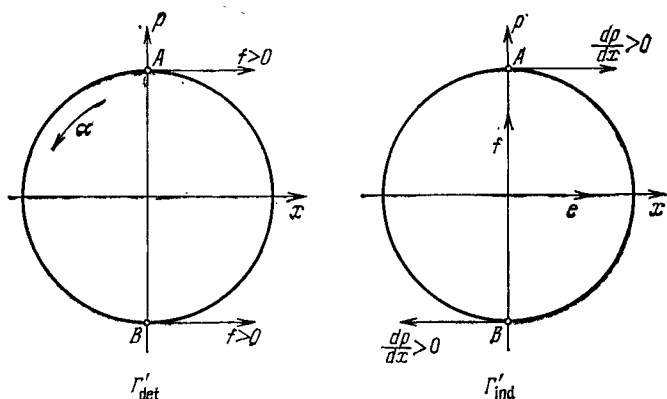


Рис. 12.

образом, на многообразии  $\Gamma'$  мы получили другую ориентацию, скажем,  $\Gamma'_{ind}$ , не совпадающую, вообще говоря, с ориентацией, задаваемой функцией  $f$ . Действительно, уже в случае  $n=1$  многообразие  $\Gamma'$  нульмерно и состоит из двух изолированных точек. Лагранжев грассманиан  $G_2^{SO}(I_1)$  можно отождествить с точками окружности  $x^2 + p^2 = 1$ , считая, что сама ориентированная одномерная лагранжева плоскость задается вектором с координатами  $(x, y)$ , конец которого лежит на окружности. Тогда подмногообразие  $\Gamma'$  состоит из двух точек:  $A = (0, 1)$  и  $B = (0, -1)$ . Если  $\alpha$  — угловой параметр на окружности, то функция  $f$  имеет вид  $f(\alpha) = \cos \alpha$ . Следовательно, функция  $f$  положительна при  $x > 0$  и отрицательна при  $x < 0$ .

Значит, точка  $A$  имеет ориентацию  $(-)$ , а точка  $B$  имеет ориентацию  $(+)$  для ориентации  $\Gamma'_{\det}$ . В случае же ориентации  $\Gamma'_{\text{ind}}$  обе точки  $A$  и  $B$  имеют ориентацию  $(-)$ .

На рис. 12 изображены направления ориентации нормальных расслоений в точках  $A$  и  $B$  при различных способах ориентации. Условие  $\langle f, e \rangle > 0$  эквивалентно  $dp/dx > 0$ . В случае  $\Gamma' = [G_4^{SO}(I_2)]^1 \subset G_4^{SO}(I_2)$  многообразие  $\Gamma'$  двумерно и тоже состоит из двух  $\mathbb{Z}_2$ -компонент связности, на которых ориентации  $\Gamma'_{\det}$  и  $\Gamma'_{\text{ind}}$  не согласованы. Каждая компонента имеет вид поверхности вращения окружности вокруг прямой, касающейся окружности в некоторой точке  $C$  (вырожденный тор). Центральная точка  $C$  уже принадлежит  $[G_4^{SO}(I_2)]^2$  и является общей границей обеих компонент связности многообразия  $\Gamma'$  (рис. 13).

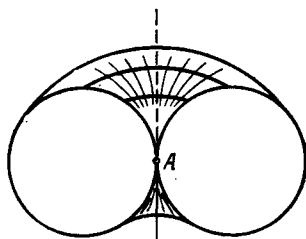


Рис. 13.

Таким образом, к многообразию  $\Gamma' = [G_{2n}^{SO}(I_n)]^1$  применима теория пересечений с замкнутыми кривыми.

Функция  $\text{ind}[\gamma: \Gamma']$  определяет некоторый одномерный класс когомологий многообразия  $G_{2n}^{SO}(I_n)$ , не зависящий по построению от размерности  $n$ . Этот класс поэтому достаточно вычислить при  $n=1$ , т. е. для  $G_2^{SO}(I_1) = S^1$ . В этом частном случае многообразие  $\Gamma'$  состоит из двух точек, поэтому, если  $\gamma$  — образующий цикл, то  $\text{ind}[\gamma: \Gamma'] = 2$ .

Таким образом, для любого лагранжева грассманиана  $G_{2n}^{SO}(I_n)$  и замкнутого цикла  $\gamma$  справедливо равенство

$$\int_{\gamma} \omega = 2 \text{ind}[\gamma: \Gamma'].$$

Чтобы перейти к теории пересечения непосредственно на лагранжевом многообразии  $\varphi: M \rightarrow \Phi_{\mathbb{R}}(2n)$ , достаточно предположить, что отображение

$$d\varphi: M \rightarrow G_{2n}^{SO}(I_n) \quad (4.1)$$

трансверсально регулярно вдоль всех подмногообразий  $[G_{2n}^{SO}(I_n)]^k$ . Тогда прообраз  $\Gamma = (d\varphi)^{-1}(\Gamma')$  будет являться

гладким многообразием коразмерности 1, а его топологическая граница  $\bar{\Gamma} \setminus \Gamma$  будет равняться объединению  $\bigcup_{n \geq 2} (d\varphi)^{-1} [G_{2n}^{SO}(I_n)]^k$  и иметь коразмерность  $\geq 3$ .<sup>3</sup> Покажем, что «почти» для всех вложений

$$\varphi: M \rightarrow \Phi_{\mathbb{R}}(2n)$$

отображение (4.1) удовлетворяет условию трансверсальной регулярности вдоль любого конечного набора подмногообразий.

*Л е м м а 4.1. Существует такое сколь угодно близкое к тождественному каноническое преобразование  $\psi$  фазового пространства  $\Phi_{\mathbb{R}}(2n)$ , что композиция  $\psi\varphi: M \rightarrow \Phi_{\mathbb{R}}(2n)$  индуцирует уже трансверсально регулярное отображение  $d(\psi\varphi): M \rightarrow G_{2n}^{SO}(I_n)$  вдоль конечного набора подмногообразий.*

В самом деле, композиция отображения  $\varphi$  и канонических преобразований может рассматриваться как общее отображение  $A: M \times U(n) \rightarrow \Phi_{\mathbb{R}}(2n)$ .

Рассмотрим «дифференциал» отображения  $A$

$$dA: M \times U(n) \rightarrow G_{2n}^{SO}(I_n).$$

Поскольку  $G_{2n}^{SO}(I_n) = U(n)/O(n)$ , то  $dA$  является трансверсально регулярным вдоль любого подмногообразия в  $G_{2n}^{SO}(I_n)$ . Далее нужно применить теорему Абрахама.

Таким образом, второе условие квантования можно записать в терминах индекса пересечения замкнутых кривых  $\gamma$  с особым подмногообразием  $\Gamma$ .

*Т е о р е м а 4.2. Пусть  $M \subset \Phi_{\mathbb{R}}(2n)$  — лагранжево многообразие, находящееся в общем положении в смысле трансверсальной регулярности дифференциала (4.1)*

$$d\varphi: M \rightarrow G_{2n}^{SO}(I_n)$$

*вдоль подмногообразий  $[G_{2n}^{SO}(I_n)]^k$ , и  $\Gamma = (d\varphi)^{-1}([G_{2n}^{SO}(I_n)]^1)$  — особое подмногообразие коразмерности 1, лежащее в  $M$ . Тогда второе условие квантования эквивалентно сравнениям*

$$\text{ind}[\gamma: \Gamma] \equiv 0 \pmod{4}$$

*для любой замкнутой кривой  $\gamma \subset M$ .*

## Г Л А В А III

### КОМПЛЕКСНЫЕ ЛАГРАНЖЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ

Геометрия комплексных лагранжевых многообразий более сложна и требует дополнительного исследования аналогов аналитических функций. Поэтому здесь мы остановимся только на тех вопросах, которые можно изучить без привлечения анализа почти аналитических функций на лагранжевых многообразиях, т. е. ограничимся только геометрией линейных лагранжевых многообразий — аналогов лагранжевых плоскостей в вещественном случае.

#### § 3.1. Грассманиан положительных лагранжевых плоскостей

Пусть, как и раньше,  $I$  обозначает некоторое подмножество натуральных чисел от 1 до  $n$ ,  $\bar{I}$  — дополнение к множеству  $I$  в отрезке натуральных чисел  $[1, n]$ . Через  $C^I$  обозначим подпространство фазового пространства  $\Phi_c$ , порожденное векторами  $\{e_k, k \in I\}$ . Через  $C_{\bar{I}}$  обозначим подпространство, порожденное векторами  $\{f^k, k \in \bar{I}\}$ . Легко видеть, что подпространство  $C^I \times C_{\bar{I}} \subset \Phi_c$  является лагранжевой плоскостью. Пусть

$$P_I: \Phi_c \rightarrow C^I \times C_{\bar{I}}$$

обозначает проекцию фазового пространства  $\Phi_c$  вдоль подпространства  $C^I \times C_{\bar{I}}$ .

**Лемма 1.1.** Пусть  $L \subset \Phi_c$  — произвольная лагранжева плоскость. Существует такое множество  $I$ , что

$$P_I|L: L \rightarrow C^I \times C_{\bar{I}}$$

является изоморфизмом.

Пусть  $L \subset \Phi_C$  — лагранжева плоскость,  $C \in GL(2n, I_n)$  — такое гамильтоново преобразование, что  $L = C(C^n)$ . Пусть  $I$  — такой набор индексов, что  $P_I: L \rightarrow C^I \times C_{\bar{I}}$  является изоморфизмом. Тогда преобразование  $C$  в разложении  $\Phi_C = C^I \times C^{\bar{I}} \times C_I \times C_{\bar{I}}$  задается матрицей вида

$$C = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & * & * \\ A_3 & A_4 & * & * \\ B_1 & B_2 & * & * \\ B_3 & B_4 & * & * \end{pmatrix},$$

причем матрица

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

обратима.

**Определение 1.1.** *Лагранжева плоскость называется положительной, если матрица*

$$\operatorname{Im} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ -A_3 & -A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}^{-1}$$

*неотрицательно определена.*

Необходимо доказать, что определение 1.1 корректно, т. е. не зависит от выбора набора индексов  $I$ .

**Лемма 1.2.** *Пусть комплекснозначная матрица*

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

*удовлетворяет условиям:*

- а)  $C^t = C$ ;
- б)  $\operatorname{Im} C$  положительно определена;
- в)  $\operatorname{Im} C_4$  положительно определена.

*Тогда матрица*

$$\operatorname{Im} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}^{-1}$$

*положительно определена.*

**Доказательство.** Пусть

$$C_k = A_k + iB_k.$$

Тогда

$$C_4^{-1} = (B_4^{-1}A_4 - iE)Z,$$

где

$$Z^{-1} = (A_4 B_4^{-1} A_4 + B_4).$$

Вычислим матрицу

$$D = \text{Im} \begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & -E \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E & 0 \\ C_3 & C_4 \end{vmatrix}^{-1}.$$

Имеем

$$\begin{vmatrix} E & 0 \\ C_3 & C_4 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} E & 0 \\ -C_4^{-1} C_3 & C_4^{-1} \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} D &= \text{Im} \begin{vmatrix} C_1 - C_2 C_4^{-1} C_3 & C_2 C_4^{-1} \\ C_4^{-1} C_3 & -C_4^{-1} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} B_1 - A_2 B_4^{-1} A_4 Z B_3 - B_2 B_4^{-1} A_4 Z A_3 + A_2 Z A_3 - B_2 Z B_3 & B_2 B_4^{-1} A_4 Z - A_2 Z \\ B_4^{-1} A_4 Z B_3 - Z A_3 & Z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Приведем симметрическую матрицу  $D$  с помощью матрицы

$$K = \begin{pmatrix} E & 0 \\ A_3 & E \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$K^t D K = \begin{vmatrix} B_1 - B_2 Z B_3 & B_2 B_4^{-1} A_4 Z \\ B_4^{-1} A_4 Z B_3 & Z \end{vmatrix}.$$

Пусть

$$K_1 = \begin{vmatrix} E & 0 \\ -Z^{-1} B_4^{-1} A_4 Z B_3 & E \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$K_1^t K^t D K K_1 = \begin{vmatrix} B_1 - B_2 Z B_3 - B_2 B_4^{-1} A_4 B_4^{-1} A_4 Z B_3 & 0 \\ 0 & Z \end{vmatrix}.$$

Нам осталось доказать, что матрица

$$H = B_1 - B_2 Z B_3 - B_2 B_4^{-1} A_4 B_4^{-1} A_4 Z B_3$$

положительно определена. Имеем

$$\begin{aligned} H &= B_1 - B_2 (1 + B_4^{-1} A_4 B_4^{-1} A_4) Z B_3 = \\ &= B_1 - B_2 B_4^{-1} (B_4 + A_4 B_4^{-1} A_4) Z B_3 = B_1 - B_2 B_4^{-1} B_3. \end{aligned}$$



Из условия в) леммы следует, что матрица

$$\operatorname{Im} C = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{vmatrix}$$

положительно определена. Поскольку матрица  $B_4$  обратима, то матрица  $\operatorname{Im} C$  эквивалентна матрице \*) ( $D$  и  $K^t D K$  называем эквивалентными)

$$\begin{vmatrix} B_1 - B_2 B_4^{-1} B_3 & 0 \\ 0 & B_4 \end{vmatrix},$$

т. е. матрица  $H$  положительно определена. Лемма 1.2 доказана.

Используя лемму 1.2, мы можем установить корректность определения 1.1. В самом деле, если  $C \in GL(2n, I_n)$ ,

$$C = \begin{vmatrix} E & * \\ B & * \end{vmatrix},$$

то  $B^t = B$ , и, наоборот, если  $B^t = B$ , то существует матрица  $C$  вида

$$C = \begin{vmatrix} E & * \\ B & * \end{vmatrix},$$

принадлежащая группе  $GL(2n, I_n)$ . Пусть

$$P_I = \begin{vmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

— гамильтоново преобразование, записанное в разложении  $\Phi_C = C^t \times C^t \times C_I \times C_I$ . Если  $C \in GL(2n, I_n)$  определяет положительную лагранжеву плоскость, то найдется согласно определению 1.1 такой набор индексов  $I$ , что матрица  $D = P_I C$  имеет вид

$$D = \begin{vmatrix} D_1 & * \\ D_2 & * \end{vmatrix},$$

---

\*) С помощью матрицы

$$\begin{vmatrix} E & 0 \\ -B_4^{-1} B_3 & B_4^{-1} \end{vmatrix}.$$

причем  $D_1$  — обратимая матрица, а  $\text{Im } D_2 D_1^{-1}$  неотрицательно определена. Пусть  $J$  — другой набор индексов,

$$H = P_J C = \begin{pmatrix} H_1 & * \\ H_2 & * \end{pmatrix},$$

$H_1$  — обратимая матрица. Тогда

$$H = P_J P_I^{-1} D = P_K D,$$

где

$$K = (I \cup J) \setminus (I \cap J).$$

Отметим теперь, что из леммы 1.2 следует

**Лемма 1.3.** Пусть комплекснозначная матрица

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условиям:

- а)  $C' = C$ ;
- б)  $\text{Im } C$  неотрицательно определена;
- в) матрица  $C_4$  обратима.

Тогда матрица

$$D = \text{Im} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}^{-1}$$

неотрицательно определена.

**Доказательство.** Пусть  $C'$  — другая комплекснозначная матрица, для которой выполнены условия а), б),

в),  $D' = \text{Im} \begin{pmatrix} C'_1 & C'_2 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ C'_3 & C'_4 \end{pmatrix}^{-1}$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  су-

ществует такое  $\delta > 0$ , что если \*)  $\|C - C'\| < \delta$ , то  $\|D - D'\| < \varepsilon$ . Если матрица  $D$  имеет отрицательные собственные значения, то найдется такое число  $\varepsilon_0 > 0$ , что всякая симметрическая матрица  $D'$ ,  $\|D - D'\| < \varepsilon_0$ , тоже будет иметь отрицательные собственные значения. С другой стороны, для любого  $\delta > 0$  найдется такая матрица  $C'$ , что  $\|C - C'\| < \delta$ ,  $C'^t = C'$ ,  $\text{Im } C'$  положительно определена. Тогда из леммы 2.2 главы II следует, что матрица  $D'$  положительно определена, а  $\|D - D'\| < \varepsilon_0$ . Противоречие доказывает лемму 1.3. Применяя лемму 1.2 к

\*) В любой норме конечномерного пространства.

матрице  $D_2 D_1^{-1}$ , получаем, что  $\text{Im } H_2 H_1^{-1}$  неотрицательно определена. Таким образом, мы полностью доказали корректность определения 1.1.

**Определение 1.3.** Множество положительных лагранжевых плоскостей будем обозначать через  $G_{2n}^+(I_n) \subset G_{2n}(I_n)$ .

Опишем пространство  $G_{2n}^+(I_n) \subset G_{2n}(I_n)$  при  $n = 1$ . В этом случае фазовое пространство двумерно,  $\Phi_{\mathbb{C}}(2) = \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}_1$ , а лагранжев грассманиан  $G_{2n}(I_n)$  состоит из всех комплексных прямых  $L \subset \mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}_1$ , проходящих через начало координат. Если  $(z, \xi)$  — линейная система координат в фазовом пространстве  $\Phi_{\mathbb{C}}(2)$ , то каждая лагранжева плоскость  $L$  задается уравнением  $\lambda z + \mu \xi = 0$ ;  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . Таким образом,  $G_2(I_1)$  изоморфно комплексному проективному пространству  $\mathbb{C}P^1$  или, что то же самое, расширенной комплексной плоскости  $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C}^1 \cup (\infty)$ . Тогда подпространство  $G_2^+(I_1)$  определяется неравенством  $\text{Im } \frac{\lambda}{\mu} \geq 0$ . Следовательно,  $G_2^+(I_1)$  совпадает с верхней полуплоскостью в расширенной комплексной плоскости, т. е. гомеоморфно двумерному диску. Таким образом, пространство  $G_2^+(I_1)$  является стягиваемым пространством.

Над многообразием  $G_{2n}(I_n)$  имеется каноническое комплексное  $n$ -мерное расслоение  $\xi_n$ , составленное из самих лагранжевых плоскостей. Опишем расслоение  $\xi_n$  более точно. Рассмотрим прямое произведение  $G_{2n}(I_n) \times \Phi_{\mathbb{C}}$ . В этом прямом произведении выделим подпространство  $E \subset G_{2n}(I_n) \times \Phi_{\mathbb{C}}$ , состоящее из всех точек вида

$$(L, x) \in G_{2n}(I_n) \times \Phi_{\mathbb{C}}, \quad x \in L.$$

Проекция на первую координату

$$G_{2n}(I_n) \times \Phi_{\mathbb{C}} \rightarrow G_{2n}(I_n)$$

индуцирует отображение

$$\pi: E \rightarrow G_{2n}(I_n).$$

Очевидно, что прообразом каждой точки  $L \in G_{2n}(I_n)$  является подпространство, гомеоморфное  $n$ -мерному комплексному пространству  $L$ . Можно показать, что

$\{E, G_{2n}(I_n), \pi\}$  является локально тривиальным расслоением со структурной группой  $U(n)$ .

Это комплексное  $n$ -мерное расслоение  $\{E, G_{2n}(I_n), \pi\}$  мы и будем обозначать через  $\xi_n$ .

**Теорема 1.4.** Пусть  $\eta$  обозначает ограничение расслоения  $[\Lambda^n(\xi_n)]^*$  на подпространство  $G_{2n}^+(I_n)$ . Тогда существует аналитическое сечение  $\sigma: G_{2n}^+(I_n) \rightarrow \eta$ , в каждой точке отличное от нуля.

**Доказательство.** В случае  $n=1$  утверждение тривиально, поскольку  $G_2^+(I_1)$  — стягиваемое пространство и, следовательно, любое расслоение с базой  $G_2^+(I_1)$  тривиально. Приведем доказательство в общем случае. Напомним, что через  $\Lambda^n(\xi_n)$  обозначается  $n$ -я внешняя степень расслоения  $\xi_n$ . Поскольку  $\dim \xi_n = n$ , то  $\dim \Lambda^n(\xi_n) = \dim \eta = 1$ . Таким образом, чтобы построить ненулевое в каждой точке сечение  $\sigma: G_{2n}^+(I_n) \rightarrow \eta$ , достаточно в каждой точке  $x \in G_{2n}^+(I_n)$  сопоставить ненулевой вектор  $\sigma(x)$  внешней степени  $\Lambda^n(L)$  слоя  $L$  расслоения  $\xi_n$ . Пусть  $(a_1, \dots, a_n)$  — базис векторного пространства  $L$ . Тогда вектор  $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$  будет базисным вектором пространства  $\Lambda^n L$ . Если  $(a'_1, \dots, a'_n)$  — другой базис в пространстве  $L$ ,  $a_i = \sum_j c_{ij} a'_j$ , то

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_n = \det(c_{ij}) \cdot a'_1 \wedge \dots \wedge a'_n.$$

Следовательно, чтобы построить сечение  $\sigma: G_{2n}^+(\eta) \rightarrow \eta$ , достаточно каждому базису  $(a_1, \dots, a_n)$  лагранжевой плоскости  $L$  сопоставить ненулевое комплексное число

$$f(a_1, \dots, a_n)$$

таким образом, чтобы

$$f(a_1, \dots, a_n) \det(c_{ij})^{-1} = f(a'_1, \dots, a'_n),$$

где  $(a'_1, \dots, a'_n)$  — другой базис в пространстве  $L$ , связанный соотношением

$$a_i = \sum_j c_{ij} a'_j.$$

**Лемма 1.5.** Пусть  $C$  — комплекснозначная матрица,  $C^t = C$ ,  $\text{Im } C$  — неотрицательно определенная матрица. Если  $\lambda$  — собственное значение матрицы  $C$ , то  $\text{Im } \lambda \geq 0$ .

**Лемма 1.6.** Пусть  $C \in GL(2n, I_n)$ ,

$$C(\mathbb{C}^n) \in G_{2n}^+(I_n),$$

$$C = \begin{Bmatrix} A & * \\ B & * \end{Bmatrix}.$$

Тогда

$$\det(A - iB) \neq 0.$$

Пусть теперь  $(a_1, \dots, a_n)$  — произвольный базис положительной лагранжевой плоскости  $L \in G_{2n}^+(I_n)$ ,

$$X = \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}$$

— матрица координат векторов  $(a_1, \dots, a_n)$ . Положим

$$f(a_1, \dots, a_n) = \det(A - iB).$$

Если  $(a'_1, \dots, a'_n)$  — другой базис и

$$X' = \begin{Bmatrix} A' \\ B' \end{Bmatrix}$$

— его матрица координат,

$$a_i = \sum_j c^j_i a'_j,$$

то

$$X = X' C^t,$$

где  $C = \|c^j_i\|$ . Таким образом,

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A' \\ B' \end{Bmatrix} C^t,$$

$$A = A' C^t, B = B' C^t, (A - iB) = (A' - iB') C^t.$$

Следовательно,

$$f(a_1, \dots, a_n) = f(a'_1, \dots, a'_n) \det(c^j_i).$$

Таким образом, функция  $f(a_1, \dots, a_n)$  корректно определяет сечение

$$\sigma: G_{2n}^+(I_n) \rightarrow \eta.$$

Аналитичность сечения  $\sigma$  следует из того, что

а) группа  $U(2n, I_n)$  является аналитическим многообразием, а операция умножения в группе  $U(2n, I_n)$  является аналитическим отображением;

б) линейное действие группы  $U(n)$  на пространстве  $\mathbb{C}^n$  является аналитическим действием;

в) расслоение  $U(n) \rightarrow U(2n, I_n) \rightarrow G_{2n}(I_n)$  является аналитическим расслоением аналитических многообразий;

г) базис  $(a_1, \dots, a_n)$  в лагранжевой плоскости  $L$  локально можно выбрать аналитически зависящим от точки  $L \in G_{2n}(I_n)$ ;

д) функция  $\det(A - iB)$  является аналитической функцией от элементов матриц  $A$  и  $B$ .

Теорема 1.4 полностью доказана.

### § 3.2. Индекс комплексных лагранжевых многообразий

Аналогично второму условию квантования для вещественных лагранжевых многообразий в случае положительных лагранжевых плоскостей можно сформулировать условие квантования на сечение  $\sigma$  расслоения  $\eta$ .

Пусть  $\{U_I\}$  — множество таких лагранжевых плоскостей  $L \subset G_{2n}^+(I_n)$ , что проекция

$$P_I^I: L \rightarrow \mathbb{C}^I \times \mathbb{C}_{\bar{I}}$$

является изоморфизмом. Тогда

$$\bigcup U_I = G_{2n}^+(I_n).$$

Пусть  $X \subset G_{2n}^+(I_n)$  — открытое множество,  $\eta|_X$  — ограничение расслоения  $\eta$  на  $X$ . Если  $\sigma$  — ненулевое сечение расслоения  $\eta|_X$ , то в карте  $U_I$  определена функция

$$J_I = \frac{\partial(z^I, \zeta_{\bar{I}})}{\partial \sigma}.$$

Тогда второе условие квантования примет следующий вид: в каждой карте  $X \cap U_I$  можно так выбрать аргументы  $\arg J_I$ , чтобы в пересечении  $U_I \cap V_K$  было выполнено соотношение

$$\arg J_K - \arg J_I = \sum_k \arg \lambda_k + |I_2| \pi, \quad (2.1)$$

где

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg \lambda_k < \frac{\pi}{2},$$

$$I_1 = I \cap K, \quad I_2 = I \setminus K, \quad I_3 = K \setminus I, \quad I_4 = \bar{I} \cap \bar{K},$$

а  $\{\lambda_k\}$  — собственные значения матрицы

$$-\frac{\partial(\zeta_{I_2}, -z^{I_3})}{\partial(z^{I_1}, \zeta_{I_3})}. \quad (2.2)$$

Для того чтобы установить корректность условия (2.1), достаточно доказать, что собственные значения матрицы (2.2) находятся в нижней комплексной полуплоскости. В самом деле, пусть  $L \subset \Phi_c$  — положительная лагранжева плоскость, у которой в качестве координат служат как координаты  $(z^I, \zeta_{\bar{I}})$ , так и координаты  $(z^J, \zeta_{\bar{J}})$ . Условие положительности лагранжевой плоскости означает, что матрица

$$-\operatorname{Im} \frac{\partial(\zeta_J, -z^{\bar{J}})}{\partial(z^I, \zeta_{\bar{I}})} \quad (2.3)$$

неположительно определена или матрица

$$-\operatorname{Im} \frac{\partial(\zeta_J, -z^{\bar{J}})}{\partial(z^J, \zeta_{\bar{J}})}$$

неположительно определена. Поскольку матрица (2.2) является главным минором матрицы (2.3), то ее мнимая часть неположительно определена.

Пусть выбраны аргументы функций  $J_I$ . Определим коцель  $C(U, V)$  канонического покрытия с коэффициентами в пучке ростков гладких функций равенством

$$C(U, V) = \arg J_J - \arg J_I - \sum_k \arg \lambda_k - |I_2| \pi,$$

где  $\{\lambda_k\}$  — такие же числа, как и в (2.1).

Л е м м а 2.1.

а)  $C(U, V) \equiv 0 \pmod{2\pi}$ .

б) Коцепь  $C(U, V)$  является коциклом.

в) Условие (2.1) справедливо тогда и только тогда, когда коцикл  $C(U, V)$  когомологичен нулю в группе  $H^1(X, \mathbb{Z})$ .

Доказательство. а) Очевидно, справедливо равенство

$$J_{J'} = J_I \det \frac{\partial (\xi_{I_2}, z^{I_3})}{\partial (z^{I_2}, \xi_{I_3})}.$$

Поэтому (2.1) справедливо по модулю  $2\pi$ .

б) Достаточно доказать коцикличность коцепи

$$d(U, V) = \sum_k \arg \lambda_k + |I_2| \pi,$$

где  $\{\lambda_k\}$  — собственные значения матрицы (2.2), поскольку эта коцепь отличается от  $C(U, V)$  на кограницу. Без ограничения общности \*) можно считать, что одна из карт есть карта вида  $U_n$ .

Таким образом, нам нужно показать, что

$$d(U, V) + d(V, W) + d(W, U) = 0,$$

или, что то же,

$$\begin{aligned} \arg \det \frac{\partial (z^{I_3}, -\xi_{I_2})}{\partial (\xi_{I_2}, z^{I_3})} + |I_2| \pi + \arg \det \frac{\partial (z^{I_3}, z^{I_4})}{(\xi_{I_3}, \xi_{I_4})} + \\ + \arg \det \frac{\partial (-\xi_{I_2}, -\xi_{I_4})}{\partial (z^{I_3}, z^{I_4})} + |I_3 + I_4| \pi = 0, \quad (2.4) \end{aligned}$$

где под символом  $\arg \det$  соответствующей матрицы мы понимаем сумму аргументов ее собственных значений, каждый из которых берется в пределах  $\left(-\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ . Заметим, что последнее определение корректно, поскольку

---

\*) Действительно, условие б) достаточно проверить в какой-либо точке. Далее, это условие зависит лишь от лагранжевой плоскости в данной точке, а следовательно, может быть проверено в ситуации лагранжева грассманиана, где в окрестности каждой точки существует неособая карта.



все матрицы, входящие в выражение (2.4), неположительно определены как матрицы главных миноров матрицы, взятой с обратным знаком:

$$\text{Im} \begin{vmatrix} \frac{\partial \zeta_I}{\partial z^I} & -\frac{\partial z^{\bar{I}}}{\partial z^I} \\ \frac{\partial \zeta_I}{\partial \bar{z}^{\bar{I}}} & \frac{\partial z^{\bar{I}}}{\partial \bar{z}^{\bar{I}}} \end{vmatrix}.$$

Выберем в лагранжевой плоскости такой базис, чтобы матрица его координат имела вид

$$X = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{vmatrix}$$

в разложении фазового пространства

$$\Phi_c = C^{I_1} \times C^{I_2} \times C^{I_3} \times C^{I_4} \times C_{I_1} \times C_{I_2} \times C_{I_3} \times C_{I_4}.$$

Для матриц  $B_{kj}$  выполнены условия

$$B_{kj}^t = B_{jk}.$$

Тогда

$$\zeta_{I_s} = \sum_{k=1}^4 B_{sk} z^{I_k}.$$

Заменяя лагранжеву плоскость на близкую, можно считать, что все матрицы  $B_{kk}$  обратимы. Тогда, полагая

$$Q_{ks} = B_{ks} - B_{k4} B_{44}^{-1} B_{4k},$$

получаем

$$\frac{\partial (z^{I_3}, -\zeta_{I_2})}{\partial (\zeta_{I_3}, z^{I_2})} = \begin{vmatrix} -Q_{22}^{-1} & Q_{22}^{-1} Q_{23} \\ Q_{32} Q_{22}^{-1} & Q_{33} - Q_{32} Q_{22}^{-1} Q_{23} \end{vmatrix}.$$

Последняя матрица эквивалентна матрице

$$\begin{vmatrix} -Q_{22}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_{33} \end{vmatrix}.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial(-\zeta_{I_3}, -\zeta_{I_4})}{\partial(z^{I_3}, z^{I_4})} = \begin{vmatrix} B_{33} & B_{34} \\ B_{43} & B_{44} \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

Матрица (2.5) эквивалентна матрице

$$\begin{vmatrix} Q_{33} & 0 \\ 0 & B_{44} \end{vmatrix}. \quad (2.6)$$

Наконец,

$$\frac{\partial(-\zeta_{I_2}, -\zeta_{I_4})}{\partial(z^{I_2}, z^{I_4})} = \begin{vmatrix} B_{22} & B_{24} \\ B_{42} & B_{44} \end{vmatrix}, \quad (2.7)$$

а матрица (2.7) эквивалентна матрице

$$\begin{vmatrix} Q_{22} & 0 \\ 0 & B_{44} \end{vmatrix}. \quad (2.8)$$

Таким образом, надо показать, что

$$\begin{aligned} \arg \det \begin{vmatrix} -Q_{22}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_{33} \end{vmatrix} + |I_2| \pi + \arg \det \begin{vmatrix} -Q_{33}^{-1} & 0 \\ 0 & -B_{44}^{-1} \end{vmatrix} + \\ + \arg \det \begin{vmatrix} Q_{22} & 0 \\ 0 & B_{44} \end{vmatrix} + |I_3 + I_4| \pi = 0. \end{aligned}$$

Действительно, нетрудно увидеть, что

- 1)  $\arg \det Q_{22} + \arg \det (-Q_{22}^{-1}) = -|I_2| \pi;$
- 2)  $\arg \det Q_{33} + \arg \det (-Q_{33}^{-1}) = -|I_3| \pi;$
- 3)  $\arg \det Q_{44} + \arg \det (-Q_{44}^{-1}) = -|I_4| \pi.$

Сравнивая матрицы (2.5), (2.6) и (2.8), получаем утверждение б) леммы 2.1. Утверждение в) леммы 2.1 тривиально.

**Теорема 2.2.** Пусть  $X \subset G_{2n}^+(I_n)$  — открытое множество,  $\mu$  — сечение расслоения  $\eta|_X$ . Условие (2.1) справедливо тогда и только тогда, когда  $\mu/\sigma$  определяет когомологичный нулю одномерный коцикл в группе  $H^1(X, \mathbb{Z})$  на многообразии  $X$ .

**Доказательство.** Достаточно установить, что если  $\mu = \sigma$ , то выполнено условие (2.1). Пусть  $\mu = \sigma$ . Нужно так выбрать  $\arg J_I$ , чтобы выполнялись условия (2.1). Достаточно удовлетворить соотношениям (2.1), когда  $J = n$ . В этом случае выберем базис в лагранжевой плоскости так, чтобы ее матрица координат имела вид

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрицы

$$\operatorname{Im} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{Im} B_4$$

неотрицательно определены. Используя вид матрицы  $X$ , получаем

$$\begin{aligned} J_I &= \det \left( E - i \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} \right) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -B_4^{-1}B_3 & B_4^{-1} \end{bmatrix} = \\ &= \det \left( E - i \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} \right) \cdot \det B_4^{-1}, \quad (2.9) \end{aligned}$$

$$J_J = \det \left( E - i \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} \right), \quad (2.10)$$

а матрица (2.2) имеет вид

$$- \frac{\partial (\zeta_{I_1}, -z^{I_1})}{\partial (z^{I_1}, \zeta_{I_1})} = \frac{\partial (z^{\bar{I}})}{\partial (\zeta_{\bar{I}})} = B_4^{-1}.$$

Выберем аргументы у собственных значений матрицы

$$E - i \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$$

в правой полуплоскости, а у собственных значений матрицы  $B_4^{-1}$  — в нижней полуплоскости. Тогда при таком выборе аргумента мы получаем однозначно определяемый аргумент у чисел (2.9), (2.10) и справедливо (2.1).

Выясним, как связаны условия квантования для вещественных лагранжевых грассманианов  $G_{2n}^{SO}(I_n)$  и  $G_{2n}^{+}(I_n)$ .

Существует естественное отображение

$$G_{2n}^{SO}(I_n) \xrightarrow{\pi} G_{2n}^+(I_n).$$

Поскольку над пространством  $G_{2n}^+(I_n)$  существовало ненулевое сечение  $\sigma: G_{2n}^+(I_n) \rightarrow \eta$ , то над пространством  $G_{2n}^{SO}(I_n)$  тоже существует ненулевое сечение, являющееся прообразом сечения  $\sigma$ :

$$\pi^*(\sigma): G_{2n}^{SO}(I_n) \rightarrow \pi^*(\eta).$$

С другой стороны, в расслоении  $\pi^*(\eta) = \eta_{so}$  можно построить и другое сечение, использующее ориентацию лагранжевых плоскостей  $(L, \varepsilon) \in G_{2n}^{SO}(I_n)$ . Как и для сечения  $\sigma$ , будем строить такую функцию  $g(a_1, \dots, a_n)$  от ортонормированных базисов  $(a_1, \dots, a_n)$  плоскости  $L$ , чтобы выполнялось соотношение

$$g(a_1, \dots, a_n) \det(c_{ij})^{-1} = g(a'_1, \dots, a'_n), \quad (2.11)$$

где  $a_k = \sum_j c_{kj} a'_j$ .

Для любого вещественного ортонормированного базиса  $(a_1, \dots, a_n)$ , задающего ориентацию  $\varepsilon$  на вещественной лагранжевой плоскости  $L \subset \Phi_R$ , положим

$$g(a_1, \dots, a_n) = 1. \quad (2.12)$$

Очевидно, что условие (2.11) выполняется для любого другого базиса  $(a'_1, \dots, a'_n)$ , задающего ту же ориентацию  $\varepsilon$  на плоскости  $L$ , ибо  $\det(c_{ij}) = 1$ .

Построенное по формулам (2.12) сечение будем обозначать через  $\sigma_R$ . Итак, мы имеем два ненулевых сечения:

$$\pi^*\sigma: G_{2n}^{SO}(I_n) \rightarrow \eta_{so}$$

и

$$\sigma_R: G_{2n}^{SO}(I_n) \rightarrow \eta_{so}$$

расслоения  $\eta_{so}$ . Пусть

$$f: \mathbb{C} \times G_{2n}^{SO}(I_n) \rightarrow \eta_{so}$$

— изоморфизм расслоений, определяемый соотношением

$$f(\lambda, x) = \lambda \pi^*\sigma(x).$$

Тогда второе сечение  $\sigma_R$  задает нам отображение пространства  $G_{2n}^{SO}(I_n)$  в окружность  $S^1$ :

$$g: G_{2n}^{SO}(I_n) \rightarrow S^1,$$

которое определяется следующим образом. Композиция отображений  $f^{-1} \circ \sigma_R$  имеет вид

$$(f^{-1} \circ \sigma_R)(x) = (h(x), x), \quad h(x) \in \mathbb{C},$$

причем  $h(x) \neq 0$ . Полагаем

$$g(x) = \frac{h(x)}{|h(x)|} \in S^1 \subset \mathbb{C}.$$

**Теорема 2.3.**

а)  $H^1(G_{2n}^{SO}(I_n)) = \mathbb{Z}$ .

б) Пусть  $u_n \in H^1(G_{2n}^{SO}(I_n))$  — образующий элемент. Тогда в группе  $H^1(S^1) = \mathbb{Z}$  так можно выбрать образующую  $s \in H^1(S^1)$ , что  $g^*(s) = u_n$ .

Теорему 2.3 можно сформулировать еще следующим образом. Пусть

$$F: \mathbb{C} \times G_{2n}^+(I_n) \rightarrow \eta$$

— изоморфизм расслоений, определяемый соотношением

$$F(\lambda, x) = \lambda \sigma(x).$$

Обозначим через  $\eta_0$  образ

$$\eta_0 = F(\mathbb{C}^* \times G_{2n}^+(I_n)),$$

где  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Пространство  $\eta_0$  гомеоморфно  $\mathbb{C}^* \times G_{2n}^+(I_n)$ .

Пусть

$$a_n = (F^{-1})^*(s) \in H^1(\eta_0), \quad (2.13)$$

где  $s \in H^1(\mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}$  — образующий элемент.

**Теорема 2.4** Пусть

$$\omega: \pi^*(\eta) \rightarrow \eta$$

— отображение расслоений. Тогда

а)  $\omega \sigma_R(G_{2n}^{SO}(I_n)) \subset \eta_0$ ;

б)  $(\omega \sigma_R)^*(a_n) = u_n$ .

Для доказательства теорем 2.3 и 2.4 приведем ряд вспомогательных топологических конструкций.

Определим вложения

$$i_n: U(2n, I_n) \rightarrow U(2n+2, I_{n+1}),$$

$$i_n^U: U(n) \rightarrow U(n+1),$$

$$i_n^G: G_{2n}(I_n) \rightarrow G_{2n+2}(I_{n+1})$$

формулами:

а) если  $C \in U(2n, I_n)$ ,

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

то

$$i_n(C) = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ C_3 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

б) если  $C \in U(n)$ , то

$$i_n^U(C) = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2.14)$$

в) если  $L \in G_{2n}(I_n)$ , то

$$i_n^G(L) = i_n^\Phi(L) \oplus \{e_{n+1}\}.$$

Пусть

$$j_n: U(n) \rightarrow U(2n, I_n)$$

задается формулой

$$j_n(C) = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix},$$

а

$$\theta_n: U(2n, I_n) \rightarrow G_{2n}(I_n)$$

— проекция, описанная ранее,

$$\theta_n(C) = C(C^n).$$

Тогда

а) Диаграмма отображений

$$\begin{array}{ccccc} U(n) & \xrightarrow{i_n} & U(2n, I_n) & \xrightarrow{\theta_n} & G_{2n}(I_n) \\ \downarrow i_n^U & & \downarrow i_n & & \downarrow i_n^G \\ U(n+1) & \xrightarrow{j_{n+1}} & U(2n+2, I_{n+1}) & \xrightarrow{\theta_{n+1}} & G_{2n+2}(I_{n+1}) \end{array}$$

коммутативна.

б)  $i_n^G(G_{2n}^+(I_n)) \subset G_{2n+2}^+(I_{n+1})$ .

в) Существует изоморфизм

$$\varphi_n: \xi_n \oplus 1 \rightarrow (i_n^G)^*(\xi_{n+1}),$$

причем, если  $x \in L$ ,  $L \in G_{2n}(I_n)$ , то

$$\varphi_n(x) = i_n^\Phi(x) \oplus 0 \in i_n^G(L);$$

если  $\lambda \in \mathbb{C}$ , то

$$\varphi_n(\lambda) = 0 \oplus \lambda e_{n+1} \in i_n^G(L) = i_n^\Phi(L) \oplus \{e_{n+1}\}.$$

г) Изоморфизм  $\varphi_n$  индуцирует изоморфизм расслоений

$$\psi_n: \eta_n \rightarrow (i_n^G)^* \eta_{n+1},$$

где  $\eta_n = (\Lambda^n \xi_n)^*$ , причем

$$\psi_n = \{(\Lambda^{n+1} \varphi_n \circ \chi_n)^{-1}\}^*, \quad (2.15)$$

где  $\chi_n: \Lambda^{n+1} \xi_n \rightarrow \Lambda^{n+1}(\xi_n \oplus 1)$  — естественный изоморфизм.

д) Пусть

$$\sigma_n: G_{2n}^{+\vee}(I_n) \rightarrow \eta_n$$

— сечение, построенное по теореме 1.4. Тогда

$$\sigma_n = \psi_n^*(i_n^G)^* \sigma_{n+1}.$$

Пусть, далее,  $\eta_{0n} \subset \eta_n$  — пространство ненулевых векторов расслоения  $\eta_n$ ,  $a_n \in H^1(\eta_{0n})$  определен равенством (2.13).

Тогда

$$\psi_n^*(a_{n+1})_+ = a_n.$$

Пусть вложения

$$i_n^O: O(n) \rightarrow O(n+1),$$

$$i_n^{SO}: SO(n) \rightarrow SO(n+1)$$

определяются равенством (2.14). Пусть

$$\alpha_n: SO(n) \rightarrow O(n),$$

$$\beta_n: O_+(n) \rightarrow U_+(n)$$

— естественные вложения.

Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccc} SO(n) & \xrightarrow{\alpha_n} & O(n) & \xrightarrow{\beta_n} & U(n) \\ \downarrow i_n^{SO} & & \downarrow i_n^O & & \downarrow i_n^U \\ SO(n+1) & \xrightarrow{\alpha_{n+1}} & O(n+1) & \xrightarrow{\beta_{n+1}} & U(n+1) \end{array}$$

и мы получаем

$$\pi_0(U(n)) = 0, \quad \pi_1(U(n)) = \mathbb{Z}.$$

Гомоморфизм

$$(i_n^U)_*: \pi_1(U(n)) \rightarrow \pi_1(U(n+1))$$

является изоморфизмом,

$$\pi_0(O(n)) = \mathbb{Z}_2, \quad \pi_1(O(1)) = 0,$$

$$\pi_1(O(2)) = \mathbb{Z}, \quad \pi_1(O(n)) = \mathbb{Z}_2 \text{ при } n \geq 3,$$

а гомоморфизм

$$(i_n^O)_*: \pi_1(O(n)) \rightarrow \pi_1(O(n+1))$$

при  $n \geq 3$  является изоморфизмом.

Далее,  $\pi_0(SO(n)) = 0$ , гомоморфизм

$$(\alpha_n)_*: \pi_1(SO(n)) \rightarrow \pi_1(O(n))$$

является изоморфизмом, а гомоморфизм

$$(\beta_n)_*: \pi_1(O(n)) \rightarrow \pi_1(U(n))$$

тривиален.

Переходя к пространствам  $G_{2n}^{SO}(I_n)$ ,  $G_{2n}^O(I_n)$ , получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(SO(n)) & \xrightarrow{(\alpha_n)_*} & \pi_1(O(n)) \\ (\beta_n \alpha_n)_* \downarrow & & \downarrow (\beta_n)_* \\ \pi_1(U(n)) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(U(n)) \\ (\tilde{\theta}_n)_* \downarrow & & \downarrow (\theta_n)_* \\ \pi_1(G_{2n}^{SO}(I_n)) & \xrightarrow{\pi_*} & \pi_1(G_{2n}^O(I_n)) \\ \downarrow \partial_* & & \downarrow \partial \\ \pi_0(SO(n)) & \xrightarrow{(\alpha_n)_*} & \pi_0(O(n)) \\ (\beta_n \alpha_n)_* \downarrow & & \downarrow (\beta_n)_* \\ \pi_0(U(n)) & \xrightarrow{\cong} & \pi_0(U(n)) \end{array} \quad (2.16)$$



Поскольку  $(\beta_n)_* = 0$ , то эта диаграмма принимает следующий вид:

$$\begin{array}{ccc}
 0 & & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{Z} & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{Z} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_1(G_{2n}^{SO}(I_n)) & \xrightarrow{\pi_*} & \pi_1(G_{2n}^O(I_n)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & \mathbf{Z}_2 \\
 & & \downarrow \\
 & & 0
 \end{array}$$

Диаграмма (2.16) индуцирует отображение

$$\begin{array}{ccc}
 i_n^G: U(n)/O(n) \rightarrow U(n+1)/O(n+1) \\
 \parallel & & \parallel \\
 G_{2n}^O(I_n) \longrightarrow & G_{2n+2}^O(I_{n+1})
 \end{array}$$

так что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc}
 O(n) & \xrightarrow{i_n^O} & O(n+1) \\
 \beta_n \downarrow & & \downarrow \beta_{n+1} \\
 U(n) & \xrightarrow{i_n^U} & U(n+1) \\
 \theta_n \downarrow & & \downarrow \theta_{n+1} \\
 G_{2n}^O(I_n) & \xrightarrow{i_n^G} & G_{2n+2}^O(I_{n+1})
 \end{array}$$

Таким образом, мы получаем следующую коммутативную диаграмму гомотопических групп:

$$\begin{array}{ccc}
 0 & & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_1(U(n)) & \xrightarrow{(i_n^U)_*} & \pi_1(U(n+1)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_1(G_{2n}^O(I_n)) & \xrightarrow{(i_n^G)_*} & \pi_1(G_{2n+2}^O(I_{n+1})) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_0(O(n)) & \xrightarrow{(i_n^O)_*} & \pi_0(O(n+1)) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0
 \end{array}$$

Поскольку  $(i_n^U)_*$  и  $(i_n^O)_*$  — изоморфизмы, то  $(i_n^G)_*$  — тоже изоморфизм. Таким образом, группа  $\pi_1(G_{2n}^O(I_n))$  изоморфна группе  $\pi_1(G_2^O(I_1))$ . Пространство  $G_2^O(I_1)$  легко описывается в явном виде: это многообразие всех прямых в  $\mathbb{R}^2$ , проходящих через начало координат, и, следовательно, гомеоморфно окружности  $S^1$ . Таким образом,

$$\pi_1(G_{2n}^O(I_n)) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}.$$

Следовательно, в диаграмме (2.16) гомоморфизм  $\pi_*$  переводит образующий элемент группы  $\pi_1(G_{2n}^{SO}(I_n))$  в двукратную образующую группы  $\pi_1(G_{2n}^O(I_n))$ . Мы можем сформулировать следующее утверждение.

**Л е м м а 2.5.**

а)  $H^1(G_{2n}^{SO}(I_n)) = \mathbb{Z}.$

б)  $H^1(G_{2n}^O(I_n)) = \mathbb{Z}.$

в) Можно так выбрать образующие  $u_n \in H^1(G_{2n}^{SO}(I_n))$ ,  $v_n \in H^1(G_{2n}^O(I_n))$ , что

$$\pi^*(v_n) = 2u_n,$$

$$(i_n^G)^*(v_{n+1}) = v_n,$$

$$(i_n^G)^*(u_{n+1}) = u_n.$$

г) Пусть

$$\psi_n: \eta_n^{SO} \rightarrow (i_n^G)^* \eta_{n+1}^{SO}$$

— изоморфизм, индуцированный равенством (2.15), а

$$\sigma_{R,n}: G_{2n}^{SO}(I_n) \rightarrow \eta_n^{SO}$$

— сечение, построенное по формулам (2.12). Тогда

$$\sigma_{R,n} = \psi_n^* (i_n^G)^* (\sigma_{R,n+1}).$$

Утверждения а), б), в) уже доказаны, а утверждение г) тривиально.

**Доказательство теорем 2.3 и 2.4.** Заметим, что утверждения теорем 2.3 и 2.4 эквивалентны. Достаточно доказать утверждение только для  $n=1$ . В самом деле, отображения

$$g_n: G_{2n}^{SO}(I_n) \rightarrow S^1$$

удовлетворяют соотношению

$$g_n = g_{n+1} \circ i_n^G.$$

Поэтому, если

$$u_n = g_n^*(s),$$

то

$$(u_n^G)^* u_{n+1} = u_n = g_n^*(s) = (g_{n+1} \circ i_n^G)^*(s) = (i_n^G)^* g_{n+1}^*(s).$$

Так как  $(u_n^G)^*$  является изоморфизмом, то  $u_{n+1} = g_{n+1}^*(s)$  и теорема 2.3 будет доказана по индукции, если

$$u_1 = g_1^*(s).$$

Итак, построим отображение  $g_1$  пространства  $G_2^{SO}(I_1)$  в окрестность  $S^1$ . Точка  $L \in G_2^{SO}(I_1)$  параметризуется базисным вектором  $a \in L$ ,  $a \in \mathbb{R}^2$ ,  $|a| = 1$ . Сечение  $\sigma_1: G_2^{SO}(I_1) \rightarrow \eta_1^{SO}$  определяется своим значением на базисном векторе  $a \in \eta_1^{SO}$ , равным  $\sigma_1(a) = a_1 + ia_2$ , где

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

— координаты вектора  $a \in \mathbb{R}^2$ .

Сечение же  $\sigma_{R,1}: G_2^{SO}(I_1) \rightarrow \eta_1^{SO}$  на базисном векторе  $a$  принимает значение

$$\sigma_{R,1}(a) = 1.$$

Таким образом, функция  $g_1: G_2^{SO}(I_1) \rightarrow S^1$  принимает следующее значение:

$$g_1(a) = (a_1 + ia_2)^{-1}.$$

Тогда отображение

$$g_1: G_2^{SO}(I_1) \rightarrow S^1$$

имеет степень 1, т. е. в группе  $H^1(G_2^{SO}(I_1)) = \mathbb{Z}$  можно так выбрать образующую  $u_1$ , что

$$g_1^*(s) = u_1.$$

Теорема 2.3 доказана.

## ЧАСТЬ II

### КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР НА ВЕЩЕСТВЕННОМ ЛАГРАНЖЕВОМ МНОГООБРАЗИИ

В этой части мы изложим конструкцию канонического оператора Маслова. Как уже объяснялось во введении, мы избрали следующий топологический способ изложения. В фазовом пространстве фиксируется лагранжево многообразие  $L$ . В каждой канонической карте многообразия  $L$  определяется локальный канонический оператор, переводящий функции на многообразии  $L$  с носителем в канонической карте в функции конфигурационного пространства. Если локальные канонические операторы совпадают на пересечении карт, то получается оператор на всем лагранжевом многообразии  $L$ . Однако, вообще говоря, локальные канонические операторы в картах не совпадают на пересечении карт и сравнение двух таких операторов приводит к серии коциклов, которые могут быть истолкованы как препятствия к построению глобального оператора.

В главе IV рассмотрены первые два препятствия. При выполнении условий квантования эти препятствующие коциклы можно выбрать тривиальными. Соответственно мы получим глобальный канонический оператор, определенный с точностью до первой степени параметра  $\hbar$ . В этой же главе приводятся формулы коммутирования канонического оператора с псевдодифференциальным оператором с точностью до  $\hbar^2$ .

Для того чтобы получить асимптотику решений с точностью до любой степени параметра  $\hbar$ , следует изучить полный набор препятствующих коциклов к построению канонического оператора на лагранжевом многообразии. Для этой цели в главе V выводятся формулы разложения интегралов быстро осциллирующей функции в ряд по степеням параметра  $\hbar$ . В главе VI строится канонический оператор и выводятся формулы коммутации канонического оператора с псевдодифференциальным оператором с точностью до любой степени параметра  $\hbar$ .

Показывается, что других препятствующих коциклов, отличных от рассмотренных в главе IV условий квантования на лагранжевом многообразии, нет, т. е. все высшие (по степеням параметра  $h$ ) препятствия несущественны.

## Г Л А В А IV

### КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР МАСЛОВА (ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ)

#### § 4.1. Конструкция элементарного канонического оператора

1. Канонические коцепи. Обозначим, как и ранее, через  $\Phi_{\mathbf{R}}$   $2n$ -мерное вещественное пространство с базисом  $(e_1, \dots, e_n, f^1, \dots, f^n)$ . Это пространство назовем вещественным фазовым пространством. Всякий вектор  $a \in \Phi_{\mathbf{R}}$  может быть однозначно представлен в виде линейной комбинации базисных векторов  $(e, f)$  с вещественными коэффициентами

$$a = x^k e_k + p_k f^k.$$

Числа  $x^k$ ,  $k=1, \dots, n$ , будут называться *x-координатами*, а числа  $p_k$ ,  $k=1, \dots, n$  — *p-координатами* вектора  $a$ . Пространство  $\Phi_{\mathbf{R}}$  мы снабдим структурой вещественного гамильтонова (симплектического) пространства, введя в нем невырожденную дифференциальную форму

$$\omega = dp \wedge dx. \quad (1.1)$$

Пусть теперь  $L$  — гладкое  $n$ -мерное многообразие.

Определение 1.1. *Вложение*

$$i: L \hookrightarrow \Phi_{\mathbf{R}}$$

*многообразия  $L$  в фазовое пространство  $\Phi_{\mathbf{R}}$  называется лагранжевым, если ограничение  $i^*\omega$  формы  $\omega$  равно нулю, т. е.*

$$i^*\omega = 0.$$

В дальнейшем лагранжевы вложения мы будем также называть лагранжевыми многообразиями.

**Пример 1.** Пусть  $\Phi_{\mathbf{R}}$  — двумерное векторное пространство. Тогда любая гладко вложенная кривая

$$\begin{aligned} x &= x(t), & t &\in [a, b] \subset \mathbf{R}^1, \\ p &= p(t), \end{aligned} \quad (1.2)$$

определяет одномерное лагранжево многообразие. В самом деле, поскольку любые два касательных вектора к произвольной точке кривой (1.2) коллинеарны, то кососимметрическая форма (1.1) на них аннулируется.

**Пример 2.** Рассмотрим в пространстве  $\Phi_{\mathbf{R}}$  многообразие, заданное системой уравнений

$$(x^k)^2 + (p_k)^2 = 1, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

При  $n=1$  это многообразие определяет, очевидно, окружность с центром в начале координат. При произвольном  $n$  данное многообразие является прямым произведением  $n$  окружностей, т. е.  $n$ -мерным тором.

Докажем лагранжевость многообразия (1.3). Действительно, поскольку при каждом  $k$  существуют либо гладкая функция  $p_k = p_k(x^k)$ , либо гладкая функция  $x^k = x^k(p_k)$ , то в выражении (1.1) при каждом  $k$  аннулируется каждое слагаемое и, следовательно, и все выражение (1.1).

Обозначим через  $[n]$  множество натуральных чисел от 1 до  $n$ :

$$[n] = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Пусть  $I \subset [n]$  — произвольное подмножество множества  $[n]$ ,  $\bar{I}$  — дополнение множества  $I$  в множестве  $[n]$ :  $\bar{I} = [n] \setminus I$ .

**Определение 1.2.** Канонической картой  $U_I$  лагранжева вложения  $i: L \hookrightarrow \Phi_{\mathbf{R}}$  мы будем называть открытую односвязную область (носитель карты)  $U \subset L$  и проекцию

$$\pi_I: U \rightarrow \mathbf{R}^I \oplus \mathbf{R}_{\bar{I}},$$

являющуюся диффеоморфизмом на открытое множество  $\mathbf{R}^I \oplus \mathbf{R}_{\bar{I}}$ , где  $\mathbf{R}^I, \mathbf{R}_{\bar{I}}$  — арифметические пространства координат вида  $(x^{i_1}, \dots, x^{i_k})$  и соответственно  $(p_{i_{k+1}}, \dots, p_{i_n})$ . Здесь  $i_1, \dots, i_k \in I, i_{k+1}, \dots, i_n \in \bar{I}$ .

Таким образом, в канонической карте лагранжева вложения  $i: L \hookrightarrow \Phi_R$  координатами служат функции  $(x^I, p_I)$ , а области карты  $U_I$  записываются в виде уравнений

$$\begin{aligned}x^{\bar{I}} &= x^{\bar{I}}(x^I, p_I), \\p_I &= p_I(x^I, p_I).\end{aligned}$$

Определение 1.3. *Каноническим атласом* лагранжева многообразия  $L$  мы будем называть любой его атлас, состоящий из канонических карт.

Лемма 1.1. *На любом лагранжевом многообразии существует канонический атлас.*

Замечания. а) Утверждение леммы можно перефразировать следующим образом. Существует такой атлас карт, что носитель каждой карты может быть записан в виде уравнений

$$\begin{aligned}x^{\bar{I}} &= x^{\bar{I}}(x^I, p_I), \\p_I &= p_I(x^I, p_I).\end{aligned}\tag{1.4}$$

б) Для гладко вложенной кривой

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\p &= p(t),\end{aligned}\quad t \in [a, b],$$

утверждение леммы очевидно. В самом деле, поскольку

$$\text{rang}(\dot{x}, \dot{p}) = 1,$$

где точка означает дифференцирование по параметру  $t$ , то при каждом значении параметра  $t$  либо  $\dot{x} \neq 0$ , либо  $\dot{p} \neq 0$ . По теореме о неявной функции существуют либо гладкая функция  $t_1 = t_1(x)$ , либо гладкая функция  $t_2 = t_2(p)$ .

Доказательство леммы 1.1. Рассмотрим произвольную точку  $l \in L$ . Ясно, что если в касательной плоскости в точке  $l$  к многообразию  $L$  найдутся канонические координаты вида  $(x^I, p_I)$ , то по теореме о неявной функции уравнение некоторой окрестности точки  $l$  в многообразии  $L$  может быть записано в виде (1.4).

Таким образом, аналитическая задача о существовании канонического атласа на лагранжевом многообразии  $L$  в действительности является алгебраической задачей о выборе канонических координат в лагранжевых гиперплоскостях (подпространствах). Эта задача решена в лемме 1.1 главы II.

Пусть  $\mu$  — некоторая гладкая невырожденная мера на лагранжевом вложении  $L$ . Определим две нульмерные коцепи канонического покрытия (т. е. покрытия, состоящего из канонических карт) многообразия  $L$ . Однако, в отличие от коцепей, с которыми мы встречались в первой части книги, коцепи, определенные ниже, будут принимать значение в множестве гладких функций. Таким образом, для задания такой нульмерной коцепи  $f$  каждому элементу покрытия  $U_i$  сопоставляется некоторая гладкая функция  $f_i$ . Граница  $\delta f$  такой коцепи определяется как набор гладких функций на пересечении карт  $U_i \cap U_j$ , причем

$$\delta(f)_{ij} = f_i - f_j \text{ в } U_i \cap U_j.$$

Этот язык, широко используемый в математике, оказывается полезным и в нашем случае.

Итак, выберем на многообразии  $L$  некоторый канонический атлас карт и определим в каждой канонической карте  $U_i$ , задаваемой уравнениями

$$\begin{aligned} x^{\bar{i}} &= x^{\bar{i}}(x^i, p_{\bar{i}}), \\ p_i &= p_i(x^i, p_{\bar{i}}), \end{aligned}$$

функцию  $S_i(x^i, p_{\bar{i}})$ , называемую действием. Функция  $S_i(x^i, p_{\bar{i}})$  определяется как произвольное решение уравнения

$$dS_i(x^i, p_{\bar{i}}) = p_i(x^i, p_{\bar{i}}) dx^i - x^{\bar{i}}(x^i, p_{\bar{i}}) dp_{\bar{i}}. \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) разрешимо, поскольку в силу лагранжевости вложения многообразия  $L$  выполнено равенство

$$d dS = i^*(dp_i \wedge dx^i - dx^{\bar{i}} \wedge dp_{\bar{i}}) = i^*(dp \wedge dx) = 0,$$

а носитель карты  $U_i$  односвязен. Отметим, что решение уравнения (1.5) определено с точностью до вещественной постоянной.



Выбрав в каждой карте некоторую постоянную, мы сопоставим, таким образом, каждому элементу покрытия  $U_I$  гладкую функцию  $S_I(x^I, p_I)$ . Это первая наша нульмерная коцепь.

Обозначим через  $\mu_I$  плотность меры  $\mu$  относительно координат  $(x^I, p_I)$  карты  $U_I$ , так что в системе локальных координат карты  $U_I$  мера  $\mu$  имеет вид

$$\mu = \mu_I(x^I, p_I) dx^I \wedge dp_I.$$

Имея в виду, что нам понадобится извлекать квадратный корень  $\sqrt{\mu_I(x^I, p_I)}$ , припишем плотности  $\mu_I(x^I, p_I)$  некоторое значение  $\arg \mu_I(x^I, p_I)$  аргумента,  $0 \leq \arg \mu_I \leq 4\pi$ , и будем считать, что  $\arg \sqrt{\mu_I(x^I, p_I)} = \frac{1}{2} \arg \mu_I(x^I, p_I)$ .

Таким образом, каждому элементу покрытия  $U_I$  мы сопоставили гладкую функцию  $\sqrt{\mu_I(x^I, p_I)}$ . Это наша вторая нульмерная коцепь.

2. Локальный канонический оператор. Определим теперь элементарный канонический оператор  $k_I$ , полагая для  $\varphi \in C_0^\infty(U_I)$  (функции с компактным в карте  $U_I$  носителем)

$$k_I \varphi = F_{p_I \rightarrow x^I}^{1/h} \exp \left\{ \frac{i}{h} S_I(x^I, p_I) \right\} \sqrt{\mu_I(x^I, p_I)} \varphi(x^I, p_I). \quad (1.6)$$

Здесь  $F^{1/h} = 1/h$ -преобразование Фурье:

$$F^{1/h} [f](p) = \left( \frac{-i}{2\pi h} \right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left\{ \frac{-i \langle x, p \rangle}{h} \right\} f(x) dx.$$

$1/h$ -преобразование Фурье, применяемое в нашей теории, обладает рядом свойств, аналогичных обычному преобразованию Фурье. Необходимые нам сведения о  $1/h$ -преобразовании Фурье приведены в добавлении I главы VI.

Предложение 1.2. Пусть  $U_I$  и  $U_J$  — две канонические карты, имеющие непустое пересечение, и пусть  $\varphi \in C_0^\infty(U_I \cap U_J)$ . Тогда существуют такие постоянные

$c_{IJ}^{(1)} \in \mathbb{R}$  и  $d_{IJ} \equiv 0 \pmod{2\pi}$ , что имеет место сравнение

$$k_I \varphi \equiv \exp \left\{ \frac{i}{h} c_{IJ}^{(1)} + \frac{i}{2} d_{IJ} \right\} k_J \varphi \pmod{h}. \quad (1.7)$$

Сравнение

$$\psi(x, h) \equiv 0 \pmod{h^N}$$

следует понимать как выполнение системы неравенств

$$\|\hat{p}^\alpha \psi(x, h)\|_{L_2} \leq c(x) h^N \quad (1.8)$$

для всех мультииндексов  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Здесь

$$\hat{p}^\alpha = (-ih)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x^1)^{\alpha_1} \dots (\partial x^n)^{\alpha_n}},$$

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ , а  $c(x)$  — бесконечно дифференцируемая функция, убывающая при  $|x| \rightarrow \infty$  быстрее любой степени вместе со всеми своими производными.

Доказательство. Нам нужно сравнить две функции:

$$k_I \varphi = F_{p_I \rightarrow x^I} \bar{I} \exp \left\{ \frac{i}{h} S_I \right\} V_{\bar{\mu}_I} \varphi,$$

$$k_J \varphi = F_{p_J \rightarrow x^J} \bar{J} \exp \left\{ \frac{i}{h} S_J \right\} V_{\bar{\mu}_J} \varphi,$$

где  $\text{supp } \varphi \in U_I \cap U_J$ . Обозначим  $I_s = I \setminus J$ ,  $I_3 = J \setminus I$ ,  $I_4 = \{n\} \setminus I_1 \cup I_2 \cup I_3$ .

Поскольку  $\bar{I} \cap \bar{J} = I_4$ , то, применяя к функциям  $k_I \varphi$  и  $k_J \varphi$   $1/h$ -преобразование Фурье  $F_{x^{I_4} \rightarrow p_{I_4}}$  и замечая, что при этом элементы  $f$ , для которых  $f \equiv 0 \pmod{h}$ , перейдут в себя, мы получаем, что для доказательства (1.7) достаточно сравнить выражения

$$F_{p_{I_4} \rightarrow x^{I_4}} \exp \left\{ \frac{i}{h} S_I \right\} V_{\bar{\mu}_I} \varphi \text{ и } F_{p_{I_4} \rightarrow x^{I_4}} \exp \left\{ \frac{i}{h} S_J \right\} V_{\bar{\mu}_J} \varphi.$$

Перейдя в последних двух выражениях к  $1/h$ -преобразованию Фурье  $F_{x^{I_4} \rightarrow p_{I_4}}$ , получим, что задача сводится к

сравнению двух выражений:

$$F_{\substack{p_{I_1} \rightarrow x^{I_1} \\ x^{I_2} \rightarrow p_{I_2}}}^{1/h} \exp \left\{ \frac{i}{h} S_I \right\} V \overline{\mu}_I \varphi, \\ \exp \left\{ \frac{i}{h} S_J \right\} V \overline{\mu}_J \varphi. \quad (1.9)$$

Выражение (1.9) в более подробной записи имеет вид

$$(-1)^{|I_2|/2} \left( \frac{i}{2\pi h} \right)^{\frac{I_2+I_2}{2}} \iint \exp \left\{ \frac{i}{h} (\langle p_{I_1}, x^{I_2} \rangle - \langle x^{I_2}, p_{I_1} \rangle) \right\} \times \\ \times \exp \left( \frac{i}{h} S_I \right) V \overline{\mu}_I \varphi dp_{I_1} dx^{I_2}. \quad (1.10)$$

Применим к интегралу (1.10) формулу асимптотического разложения интеграла быстро осциллирующей функции. Эта формула утверждает справедливость следующего асимптотического сравнения:

$$\left( \frac{i}{2\pi h} \right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left\{ \frac{i}{h} \Phi(x, p) \right\} \varphi(x, p) dp \equiv \\ \equiv \frac{\exp \left\{ \frac{i}{h} \Phi(x, p(x)) \right\} \varphi(x, p(x))}{\sqrt{\det \text{Hess}(-\Phi(x, p(x)))}} \pmod{h}. \quad (1.11)$$

В этой формуле через  $p=p(x)$  обозначена единственная стационарная точка функции  $\Phi(x, p)$  на носителе функции  $\varphi(x, p)$ , т. е. такая точка, в которой градиент функции  $\Phi(x, p)$  по переменным  $p$  обращается в нуль. Через  $\text{Hess}(-\Phi(x, p(x)))$  обозначена матрица вторых частных производных функции  $-\Phi(x, p)$  по переменным  $p$ . Для определения радикала  $\sqrt{\det \text{Hess}(-\Phi(x, p(x)))}$  аргумент подрадикального выражения выбирается по формуле

$$\arg \det \text{Hess}(-\Phi(x, p(x))) = \sum_{k=1}^n \arg \lambda_k,$$

где  $\lambda_k$  — собственные значения матрицы  $\text{Hess}(-\Phi(x, p(x)))$ , аргументы которых выбираются в пределах

$-\frac{3}{2}\pi < \arg \lambda_k \leq \frac{\pi}{2}$ . Формула (1.11) будет доказана в главе V.

Для интеграла (1.10) стационарную точку следует искать из уравнения

$$d_{p_{I_2}, x^{I_2}} (\langle p_{I_1}, x^{I_1} \rangle - \langle p_{I_1}, x^{I_2} \rangle + S_I) = 0.$$

Поскольку (см. (1.5))

$$dS_I = p_I(x^I, p_{\bar{I}}) dx^I - x^{\bar{I}}(x^I, p_{\bar{I}}) dp_{\bar{I}},$$

то уравнения для стационарной точки принимают вид

$$x^{I_2} + x^{I_2}(x^I, p_{\bar{I}}) = 0, \quad (1.12)$$

$$-p_{I_2} + p_{I_2}(x^I, p_{\bar{I}}) = 0.$$

Присоединяя к системе (1.12) тождества

$$x^{I_1} = x^{I_1}, \quad p_{I_1} = p_{I_1}, \quad (1.13)$$

мы видим, что соотношения (1.12), (1.13) определяют формулы перехода от координат  $(x^I, p_{\bar{I}})$  к координатам  $(x^J, p_{\bar{J}})$  на пересечении  $U_I \cap U_J$ . В силу этого система (1.12) однозначно разрешима относительно координат  $x^{I_2}, p_{I_2}$ :

$$x^{I_2} = x^{I_2}(x^J, p_{\bar{J}}), \quad (1.14)$$

$$p_{I_2} = p_{I_2}(x^J, p_{\bar{J}}).$$

Далее, поскольку

$$\text{Hess}_{x^{I_2}, p_{I_2}} (-S_I) = \frac{\partial (-p_{I_2}, x^{I_2})}{\partial (x^{I_2}, p_{I_2})}, \quad (1.15)$$

то в точках (1.14) гессиан (1.15) определен и отличен от нуля.

По формуле (1.11) имеем

$$(-1)^{|I_2|/2} \left( \frac{i}{2\pi\hbar} \right)^{|I_2|+|I_3|/2} \iint \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\langle p_{I_1}, x^{I_1} \rangle - \langle x^{I_2}, p_{I_2} \rangle + S_I(x^I, p_{\bar{I}})) \right\} \sqrt{\mu_I(x^I, p_{\bar{I}})} \varphi(x^I, p_{\bar{I}}) dp_{I_1} dx^{I_2} \equiv$$

$$\equiv (-1)^{|I_2|/2} \exp \left\{ \frac{i}{h} (S_I(x', p_{\bar{J}})) \right\} \exp \left\{ \frac{i}{h} \langle p_{I_2}, x^{I_2} \rangle - \right. \\ \left. - \langle x^{I_2}, p_{I_2} \rangle \right\} \frac{\sqrt{\mu_I(x', p_{\bar{J}})} \varphi(x', p_{\bar{J}})}{\sqrt{\det \text{Hess}_{x^{I_2}, p_{I_2}}(-S_I(x', p_{\bar{J}}))}} \pmod{h},$$

причем

$$\arg \frac{\sqrt{\mu_I}}{\sqrt{\det \text{Hess}(-S_I)}} = \frac{\arg \mu_I}{2} - \frac{1}{2} \sum \arg \lambda_{k, IJ},$$

где  $\lambda_{k, IJ}$  — собственные значения матрицы

$$\text{Hess}_{x^{I_2}, p_{I_2}}(-S_I(x', p_{\bar{J}})) = \frac{\partial(-p_{I_2}, x^{I_2})}{\partial(x^{I_2}, p_{I_2})}.$$

Следовательно,

$$k_{IJ} \equiv (-1)^{|I_2|/2} \exp \left\{ \frac{i}{h} [S_I + \langle p_{I_2}, x^{I_2} \rangle - \langle x^{I_2}, p_{I_2} \rangle - S_J] \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[ \arg \mu_I - \arg \mu_J - \sum \arg \lambda_{k, IJ} \right] \right\} k_{J\bar{I}} \pmod{h}.$$

Таким образом, выражения  $c_{IJ}$  и  $d_{IJ}$ , указанные в формулировке предложения 1.2, равны соответственно

$$c_{IJ} = S_I - S_J + \langle p_{I_2}, x^{I_2} \rangle - \langle x^{I_2}, p_{I_2} \rangle, \\ d_{IJ} = \arg \mu_I - \arg \mu_J - \sum \arg \lambda_{k, IJ} - |I_2| \pi.$$

Для завершения доказательства предложения 1.2 необходимо установить, что

а)  $c_{IJ}$  — вещественное число;

б)  $d_{IJ}$  кратно  $2\pi$ .

Покажем, что

$$dc_{IJ} = 0. \quad (1.16)$$

В силу (1.5) в пересечении  $U_I \cap U_J$  имеем

$$dc_{IJ} = d(S_I - S_J + \langle p_{I_2}, x^{I_2} \rangle - \langle p_{I_2}, x^{I_2} \rangle) = \\ = p_I dx^I - x^{\bar{I}} dp_{\bar{I}} - p_J dx^J + x^{\bar{J}} dp_{\bar{J}} + \\ + x^{I_2} dp_{I_2} + p_{I_2} dx^{I_2} - p_{I_2} dx^{I_2} - x^{I_2} dp_{I_2}. \quad (1.17)$$

Из соотношений

$$\begin{aligned} I &= I_1 \cup I_2, \quad \bar{I} = I_3 \cup I_4, \\ J &= I_1 \cup I_3, \quad \bar{J} = I_2 \cup I_4 \end{aligned} \quad (1.18)$$

следует, что все члены в (1.17) взаимно уничтожаются и справедливо равенство (1.16).

Далее, поскольку

$$\mu_I = \mu_J \det \frac{\partial (-p_{I_2}, x^{I_2})}{\partial (x^{I_2}, p_{I_2})} (-1)^{|I_2|} = \mu_J \prod_{k=1}^{|I_2+I_3|} \lambda_{k,IJ} (-1)^{|I_2|}, \quad (1.19)$$

то с точностью до числа, кратного  $2\pi$ , аргументы левой и правой частей выражения (1.19) равны:

$$\arg \mu_I \equiv \arg \mu_J + \sum \arg \lambda_{k,IJ} + |I_2| \pi \pmod{2\pi}.$$

Предложение 1.2 полностью доказано.

3. Квантованные лагранжевы многообразия и глобальный канонический оператор. Мы определили две одномерные коцепи канонического покрытия или, короче, канонические коцепи.

1) Коцепь  $c^{(1)} = \{c_{IJ}^{(1)}\}$ :

$$c_{IJ}^{(1)} = \langle p_{I_2}, x^{I_2} \rangle - \langle p_{I_2}, x^{I_2} \rangle + S_I - S_J. \quad (1.20)$$

2) Коцепь  $c^{(2)} = \{c_{IJ}^{(2)}\}$ :

$$c_{IJ}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \left[ \arg \mu_I - \arg \mu_J - \sum_k \arg \lambda_{k,IJ} - |I_2| \pi \right]. \quad (1.21)$$

В этом пункте мы докажем, что коцепи (1.20) и (1.21) являются коциклами.

Предложение 1.3. Коцепь  $c^{(1)}$  является коциклом.

Доказательство. Из (1.18) следует, что

$$c_{IJ} = (S_I + \langle x^{\bar{I}}, p_{\bar{I}} \rangle) - (S_J + \langle x^{\bar{J}}, p_{\bar{J}} \rangle). \quad (1.22)$$

Таким образом, если определить нульмерную коцепь  $f = \{f_I\}$  с коэффициентами в пространстве гладких функций, полагая в карте  $U_I$

$$f_I = S_I + \langle x^{\bar{I}}(x^I, p_{\bar{I}}), p_{\bar{I}} \rangle,$$

то выражение (1.22) представляет собой кограницу этой коцепи:

$$c^{(1)} = \partial f.$$

В силу известного свойства кограничного оператора ( $\partial^2 = 0$ ) отсюда следует, что кограница  $\partial c^1$  коцепи равна нулю:  $\partial c^1 = 0$ . Предложение 1.3 доказано.

**Предложение 1.4.** *Коцепь  $c^{(2)}$  является коциклом.*

Коцепь  $\{c_{IJ}^{(2)}\}$  разлагается в сумму двух коцепей  $c_{IJ}^{(2)} = \alpha_{IJ} + \beta_{IJ}$ , где

$$\alpha_{IJ} = \frac{1}{2\pi} (\arg \mu_I - \arg \mu_J),$$

$$\beta_{IJ} = -\frac{1}{2\pi} \left( \sum_k \arg \lambda_{k,IJ} + |I_2| \pi \right).$$

Согласно (2.1) главы III

$$\beta_{IJ} = \arg J_I - \arg J_J.$$

Таким образом, обе коцепи  $\{\alpha_{IJ}\}$  и  $\{\beta_{IJ}\}$  являются кограницами, а значит, коциклами. Предложение доказано.

**Определение 1.4.** *Каноническое покрытие  $\{U_I\}$  называется квантованным, если канонические коцепи  $c^{(1)}$  и  $c^{(2)}$  когомологичны нулю.*

Заметим, что класс когомологий коцикла  $c^{(1)}$  не изменится, если изменить функции  $S_I$  на константу. Отсюда следует, что если коцикл  $c^{(1)}$  когомологичен нулю, то можно так выбрать (нульмерную) коцепь  $\{S_I\}$ , что на пересечении любых двух канонических карт  $U_I \cap U_J$  будет иметь место равенство

$$S_J - S_I = \langle p_{I_2}, x^{I_2} \rangle - \langle p_{I_1}, x^{I_1} \rangle.$$

Аналогичное рассуждение можно провести и для коцикла  $c^{(2)}$ . Именно, поскольку аргументы плотности меры определены с точностью до  $2\pi k$ , то в случае, если коцикл  $c^{(2)}$  когомологичен нулю, можно так выбрать аргументы плотностей меры  $\mu_I$  в картах  $U_I$ , что будет иметь место равенство

$$\arg \mu_I - \arg \mu_J = \sum_k [\arg \lambda_{k,IJ} + |I_2| \pi,$$

где  $\{\lambda_{k, IJ}\}$  — собственные значения матрицы

$$\frac{\partial(-p_{I_1}, x^{I_2})}{\partial(x^{I_2}, p_{I_1})}$$

$$\text{и } -\frac{3}{2}\pi < \arg \lambda_{k, IJ} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Хотя выше мы определили квантованность канонического покрытия, в действительности это условие является характеристикой самого лагранжева многообразия. Этот факт основан на глубокой и важной в топологии теореме Лере, утверждающей, что классы когомологий многообразия, вычисляемые с помощью покрытий (методом Чеха), не зависят от выбора покрытия, если у покрытия все элементы, а также всевозможные пересечения элементов являются стягиваемыми пространствами. Можно считать, что наше каноническое покрытие удовлетворяет указанному условию. Следовательно, условие квантования, т. е. обращение в нуль некоторых классов когомологий, является в действительности характеристикой самого лагранжева многообразия, и мы вправе дать следующее

**Определение 1.5.** Многообразие  $L$  называется квантованным, если его классы когомологий  $c^{(1)}$  и  $c^{(2)}$  тривиальны.

Теперь мы можем сформулировать первую основную теорему этой главы о существовании глобального канонического оператора на квантованном лагранжевом многообразии.

Именно, пусть  $H^{1/h}$  — замыкание множества гладких финитных функций  $f(x, h)$  по норме

$$\|f\|_r = \sup_{0 < h \leq 1} \|(1 + |x|^2 + \hat{p}^2)^{r/2} f\|_{L_r},$$

где  $\hat{p}^2 = 1/h$ -оператор Лапласа:

$$\hat{p}^2 = + \sum \hat{p}_i^2, \quad p_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Пусть, далее,  $H^{1/h}$  — пересечение пространств  $H_r^{1/h}$ :

$$H^{1/h} = \bigcap_r H_r^{1/h}.$$



Введем в пространстве  $H^{1/h}$  (неограниченный) оператор  $A^k$  умножения на  $h^{-k}$ :

$$A^k: H^{1/h} \rightarrow H^{1/h}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Обозначим через  $D(A^k)$  область определения оператора  $A^k$ , а фактор-пространство  $H^{1/h}/D(A^k)$  — через  ${}^kH^{1/h} = {}^kH^{1/h}(\mathbb{R}^n)$ .

Заметим, что множество  $D(A^k)$  состоит из функций  $f$ , для которых выполнено неравенство (1.8) с  $N=k$ . Это позволяет упростить запись некоторых формул, например, сравнение (1.7) для квантованных многообразий может быть переписано как равенство  $k_\sharp \varphi = k_\flat \varphi$  в пространстве  ${}^1H^{1/h}(\mathbb{R}^n)$ .

В этих же терминах мы сформулируем нашу первую основную теорему о существовании и единственности глобального канонического оператора Маслова на квантованном лагранжевом многообразии.

**Теорема 1.5.** *Для квантованного лагранжевого многообразия  $L$  существует единственный оператор*

$$k: C_0^\infty(L) \rightarrow {}^1H^{1/h}(\mathbb{R}^n),$$

*совпадающий в каждой карте  $U_i$  канонического атласа с оператором (1.6), т. е. для любой финитной функции  $\varphi \in C_0^\infty(U_i)$  в пространстве  ${}^1H^{1/h}(\mathbb{R}^n)$  выполнено равенство*

$$k\varphi = k_\sharp \varphi.$$

Доказательство этой теоремы вытекает из следующей леммы.

**Лемма 1.6.** *Пусть  $L$  — гладкое многообразие,  $\mathcal{H}$  — линейное пространство. Предположим, что на многообразии  $L$  заданы открытое покрытие  $\{U_i\}$  и семейство линейных операторов  $k_i: C_0^\infty(U_i) \rightarrow \mathcal{H}$ , причем  $k_i f = k_j f$  для функций  $f \in C_0^\infty(U_i \cap U_j)$ . Тогда существует и единствен такой оператор*

$$k: C_0^\infty(L) \rightarrow \mathcal{H},$$

*что  $k f = k_i f$  для любой функции  $f \in C_0^\infty(U_i)$ .*

Доказательство этой леммы будет дано в добавлении II главы VI.

## § 4.2. Коммутация канонического оператора и оператора Гамильтона

### 1. Формулировка основной теоремы.

**Определение 2.1.** Гамильтонианом называется произвольная гладкая функция

$$H: \Phi_R \rightarrow \mathbb{R}$$

на фазовом пространстве  $\Phi_R$ , удовлетворяющая условию

$$|D_x^\alpha D_p^\beta H(x, p)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |x| + |p|)^m \quad (2.1)$$

с некоторой постоянной  $C_{\alpha, \beta} = C_{\alpha, \beta}(H) > 0$  и натуральным числом  $m$ .

Здесь

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{(\partial x^1)^{\alpha_1} \dots (\partial x^n)^{\alpha_n}}, \quad D_p^\beta = \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_n}}{\partial p_1^{\beta_1} \dots \partial p_n^{\beta_n}}$$

и  $\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n$  — произвольные натуральные числа.

**Определение 2.2.** Гамильтоновым векторным полем  $V(H)$ , ассоциированным с гамильтонианом  $H$ , называется векторное поле

$$V(H) = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_i}. \quad (2.2)$$

Здесь, как обычно, по повторяющимся индексам производится суммирование,  $i = 1, \dots, n$ .

Часто мы будем опускать индексы в выражении (2.2) и писать просто

$$V(H) = \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p}. \quad (2.3)$$

Рассмотрим гладкое вложение

$$i: L \hookrightarrow \Phi_R$$

многообразия  $L$  в фазовое пространство  $\Phi_R$ .

**Определение 2.3.** Многообразие  $L \subset \Phi_R$  называется инвариантным относительно векторного поля (2.3), если это поле касается многообразия  $L$ ;

$$V(H)|_L \subset T(L).$$

Пусть  $H$  — гамильтониан и

$$i: L \subset \Phi_{\mathbf{R}} \quad (2.4)$$

— лагранжево многообразие, т. е. для любых векторных полей  $X, Y \in T(L)$  имеет место равенство

$$\langle i^* dx \wedge dp, (X, Y) \rangle = 0. \quad (2.5)$$

Предложение 2.1. Многообразие (2.4) инвариантно относительно гамильтонова векторного поля  $V(H)$ , если и только если оно лежит на некоторой поверхности уровня гамильтониана, т. е.

$$\langle i^* dH, X \rangle = 0 \quad (2.6)$$

для любого поля  $X \in T(L)$ .

Доказательство. Покажем прежде всего, что для любого вектора  $X \in T(L)$  справедлива следующая формула:

$$\langle dH, X \rangle = \langle dx \wedge dp, (V(H), X) \rangle. \quad (2.7)$$

Действительно, пусть  $X \in T(\Phi_{\mathbf{R}})$  — произвольное векторное поле. Вычислим правую часть равенства (2.7). Имеем

$$\begin{aligned} \langle dx \wedge dp, (V(H), X) \rangle &= \langle dx^i, V(H) \rangle \langle dp_i, X \rangle - \\ &= \langle dx^i, X \rangle \langle dp_i, V(H) \rangle. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \left\langle dx, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle &= E, & \left\langle dx, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle &= 0, \\ \left\langle dp, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle &= 0, & \left\langle dp, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle &= E, \end{aligned}$$

где  $E$  — единичная матрица, то согласно определению 2.2 выражение (2.5) преобразуется к виду

$$\left\langle \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial x} dx, X \right\rangle = \langle dH, X \rangle.$$

Формула (2.7) доказана.

Докажем теперь предложение 2.1. Пусть вначале лагранжево многообразие (2.4) инвариантно относительно поля  $V(H)$ . Тогда

$$V(H) |_L \in T(L) \quad (2.8)$$

и если

$$X \in T(L), \quad (2.9)$$

то, используя формулу (2.7) и учитывая включения (2.8) и (2.9), а также лагранжевость вложения  $i$ , получаем

$$\langle i^* dH, X \rangle = \langle i^* dx \wedge dp, (V(H), X) \rangle = 0.$$

Обратно, пусть  $a \in L_a$  — произвольная точка многообразия  $L$  и для любого вектора  $X_a \in (T(L))_a$  выполнено равенство (2.6). Вновь используя (2.7), получаем ( $i_a^*$  — сужение в точку  $a$ )

$$\langle i_a^* dH, X_a \rangle = \langle (dx \wedge dp)_a, (V(H)_a, X_a) \rangle = 0.$$

Предположим противное, т. е. что вектор  $(V(H))_a$  не принадлежит касательному пространству  $T_a(L)$  к многообразию  $L$ . Поскольку в предыдущем тождестве вектор  $X_a$  может принимать произвольное значение из касательного пространства  $T_a(L)$ , то структурная форма  $(dx \wedge dp)_a$  тождественно равна нулю на подпространстве размерности  $(n+1)$ , порожденном совокупностью всех векторов из  $T_a(L)$  и дополнительным вектором  $(V(H))_a$ . С другой стороны, размерность пространства, на котором форма  $(dx \wedge dp)_a$  тождественно равна нулю, не может превосходить  $n$ . В самом деле, фиксируем в касательном пространстве ко всему фазовому пространству  $\Phi_R$  базис  $\left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_n} \right)$ . Будем считать его ортонормированным базисом некоторого скалярного произведения, которое обозначим круглыми скобками  $(\cdot, \cdot)$ . Тогда форма  $(dx \wedge dp)_a$  в базисе  $(\partial/\partial x, \partial/\partial p)$  задается кососимметрической матрицей

$$A = \begin{vmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.10)$$

Пусть  $W$  — такое подпространство касательного пространства, на котором форма  $(dx \wedge dp)_a$  тождественно равна нулю. Тогда для любых векторов  $X, Y \in W$  получим равенство

$$(AX, Y) = 0.$$

Следовательно, пространства  $W$  и  $AW$  ортогональны

относительно скалярного произведения  $(\cdot, \cdot)$ , и, значит,  $W \cap AW = 0$ . Поскольку матрица (2.10) невырождена, то  $\dim W = \dim AW$ . Поэтому  $2 \dim W \leq \dim \Phi_R = 2n$ , т. е.  $\dim W \leq n$ . Предложение 2.1 полностью доказано.

**Предложение 2.2.** Пусть лагранжево многообразие  $i: L \subset \Phi_R$  лежит на поверхности нулевого уровня гамильтониана  $H$ :

$$i^*H = 0, \quad (2.11)$$

и пусть  $U_I$  — некоторая каноническая карта с координатами  $(x^I, p_I)$ . Тогда, если  $i_I: U_I \rightarrow \Phi_R$  — ограничение вложения  $i$  на карту  $U_I$ , то для любой функции  $\psi \in C^\infty(\Phi)$  имеет место формула

$$i_I^*[V(H)\psi] = V(i_I^*H)i_I^*\psi = V(H_I)i_I^*\psi,$$

где

$$V(H_I) = i_I^*\left(\frac{\partial H}{\partial p_I}\right)\frac{\partial}{\partial x^I} - i_I^*\left(\frac{\partial H}{\partial x^I}\right)\frac{\partial}{\partial p_I}.$$

**Доказательство.** Имеем по определению

$$\begin{aligned} i_I^*[V(H)\psi] &= i_I^*\left[\left(\frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p}\right)\psi\right] = \\ &= i_I^*\left\{\frac{\partial H}{\partial p_I} \frac{\partial \psi}{\partial x^I} + \frac{\partial H}{\partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial \psi}{\partial x^{\bar{I}}} - \frac{\partial H}{\partial x^I} \frac{\partial \psi}{\partial p_I} - \frac{\partial H}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \psi}{\partial p_{\bar{I}}}\right\}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

Из условия (2.11) следует, что

$$i_I^*H = H(x^I, x^{\bar{I}}(x^I, p_I), p_I(x^I, p_I), p_{\bar{I}}) = 0.$$

Дифференцируя это равенство по переменным  $(x^I, p_I)$ , получим следующие равенства для производных  $\partial H/\partial x^I$ ,  $\partial H/\partial p_I$  на  $L$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x^I} &= -\left[\frac{\partial H}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial x^{\bar{I}}}{\partial x^I} + \frac{\partial H}{\partial p_I} \frac{\partial p_I}{\partial x^I}\right], \\ \frac{\partial H}{\partial p_I} &= -\left[\frac{\partial H}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial x^{\bar{I}}}{\partial p_I} + \frac{\partial H}{\partial p_I} \frac{\partial p_I}{\partial p_I}\right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Подставляя значения (2.13) в (2.12), получим

$$i_I^*[V(H)\psi] = i_I^*\left\{\frac{\partial H}{\partial p_I}\frac{\partial \psi}{\partial x^I} - \left[\frac{\partial H}{\partial x^{\bar{I}}}\frac{\partial x^{\bar{I}}}{\partial p_{\bar{I}}} + \frac{\partial H}{\partial p_I}\frac{\partial p_I}{\partial p_{\bar{I}}}\right]\frac{\partial \psi}{\partial x^{\bar{I}}} - \right. \\ \left. - \frac{\partial H}{\partial x^{\bar{I}}}\frac{\partial \psi}{\partial p_{\bar{I}}} + \left[\frac{\partial H}{\partial x^{\bar{I}}}\frac{\partial x^{\bar{I}}}{\partial x^I} + \frac{\partial H}{\partial p_I}\frac{\partial p_I}{\partial x^I}\right]\frac{\partial \psi}{\partial p_{\bar{I}}}\right\}. \quad (2.14)$$

Поскольку  $L$  — лагранжево многообразие, то  $(i^*(dx \wedge \wedge dp) = 0$ . В локальных координатах  $(x^I, p_{\bar{I}})$  получаем соотношение  $\frac{\partial p_I}{\partial p_{\bar{I}}} = -\frac{\partial x^{\bar{I}}}{\partial x^I}$ , и поэтому

$$i_I^*[V(H)\psi] = i_I^*\left\{\frac{\partial H}{\partial p_I}\left[\frac{\partial}{\partial x^I} + \frac{\partial x^{\bar{I}}}{\partial x^I}\frac{\partial}{\partial x^{\bar{I}}} + \frac{\partial p_I}{\partial x^I}\frac{\partial}{\partial p_I}\right]\psi - \right. \\ \left. - \frac{\partial H}{\partial x^{\bar{I}}}\left[\frac{\partial}{\partial p_{\bar{I}}} + \frac{\partial x^{\bar{I}}}{\partial p_{\bar{I}}}\frac{\partial}{\partial x^{\bar{I}}} + \frac{\partial p_I}{\partial p_{\bar{I}}}\frac{\partial}{\partial p_I}\right]\psi\right\} = V(H_I)i^*\psi.$$

На лагранжевом многообразии мы будем иногда писать  $\frac{\partial H}{\partial p_I}, \frac{\partial H}{\partial x^{\bar{I}}}$  и т. д. вместо  $i_I^*\frac{\partial H}{\partial p_I}, i_I^*\frac{\partial H}{\partial x^{\bar{I}}}$  и т. д. Предложение 2.2 утверждает, в частности, что для функции  $\varphi(x^I, p_{\bar{I}}) \in C^\infty(U_I)$  имеет место равенство

$$i_I^*[V(H)\varphi] = V(H_I)\varphi.$$

**Определение 2.4.** *Оператором Гамильтона  $\hat{H} = H(x, \hat{p})$  называется оператор, действующий на произвольную функцию  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  по формуле*

$$H(x, \hat{p})\varphi = \{F_{p \rightarrow y}^{1/h} H(x, p) F_{x \rightarrow p}^{1/h} \varphi\}_{x=y}. \quad (2.15)$$

Используя свойства  $1/h$ -преобразования Фурье (см. добавление I гл. VI), нетрудно показать, что если гамильтониан  $H(x, p)$  удовлетворяет неравенству (2.1), то оператор (2.15) продолжается до непрерывного оператора

$$\hat{H} = H(x, \hat{p}): H_r^{1/h}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_{r-m}^{1/h}(\mathbb{R}^n)$$

для любого вещественного числа  $r$ .

Наконец, нам понадобится рассматривать в карте  $U$  оператор  $H(x^I, \hat{x}^I, \hat{p}_I, p_I)$ . Этот оператор для каждой функции  $\varphi(x^I, p_I) \in C_0^\infty(U_I)$  определяется по формуле

$$H(x^I, \hat{x}^I, \hat{p}_I, p_I) \varphi(x^I, p_I) = \\ = F_{x^I \rightarrow p_I}^{1/h} \{ F_{\tilde{p}_I \rightarrow x^I}^{1/h} [ F_{p_I \rightarrow x^I}^{1/h} H(x^I, \hat{x}^I, p_I, \tilde{p}_I) F_{\tilde{x}^I \rightarrow p_I} \varphi(\tilde{x}^I, \tilde{p}_I) ] \}.$$

Дадим здесь для полноты изложения определение производной Ли  $\mathcal{L}_X$  вдоль векторного поля  $X$  на многообразии  $M$  дифференциальной формы  $\omega$ .

Пусть  $g_t$  — локальная однопараметрическая группа сдвигов вдоль векторного поля  $X$ . Тогда, если  $m$  — произвольная точка на многообразии  $M$ , то по определению

$$(\mathcal{L}_X(\omega))_m = \frac{d}{dt} g_t^*(\omega_{g_t(m)})|_{t=0},$$

где через  $\omega_{g_t(m)}$  мы обозначили сужение формы  $\omega$  в точку  $g_t(m)$ . Приведем здесь же полезную вычислительную формулу для производной Ли дифференциальной формы  $\omega$  степени  $r$ :

$$\mathcal{L}_X(\omega) = i_X(d\omega) + d(i_X(\omega)),$$

где  $i_X(\omega)$  ( $Y_1, \dots, Y_{r-1}$ ) =  $\omega(X, Y_1, \dots, Y_{r-1})$ . Символ  $i_X(\omega)$  будет также обозначаться знаком  $\lrcorner$  внутреннего произведения:

$$i_X(\omega) = X \lrcorner \omega.$$

Пусть теперь  $i: L \hookrightarrow \Phi_R$  — лагранжево многообразие и  $\mu$  — некоторая невырожденная мера на нем.

**Определение 2.5.** Говорят, что гамильтониан  $H$  и пара  $(L, \mu)$  ассоциированы, если

$$i^*H = 0, \quad \mathcal{L}_{V(H)}\mu = 0. \quad (2.16)$$

Прокомментируем теперь условия (2.16). Первое из условий (2.16) означает, что лагранжево многообразие должно лежать на поверхности нулевого уровня гамильтониана:

$$H|_L = 0.$$

Из этого условия, как показано в предложении 2.1, следует, что многообразие  $L$  инвариантно относительно гамильтонова векторного поля  $V(H)$  и, следовательно, имеет смысл дифференцирование меры  $\mu$  на многообразии  $L$  вдоль поля  $V(H)$ . При этом второе из условий (2.16) означает, что мера постоянна вдоль поля  $V(H)$ .

Перейдем к формулировке основной теоремы. Рассмотрим лагранжево многообразие  $L$  с невырожденной мерой  $\mu$  на нем и гамильтониан  $H$ , ассоциированный с парой  $(L, \mu)$ , т. е. такую функцию  $H$ , что  $i^*H=0$ ,  $\mathcal{L}_{V(H)}\mu=0$ . Пусть  $k$  — канонический оператор на лагранжевом многообразии  $L$  с мерой  $\mu$ .

**Теорема 2.3 (основная теорема).** Если векторное поле  $V(H)$  нигде не обращается в нуль, то для любой функции  $\varphi \in C_0^\infty(L)$  выполнено сравнение

$$H(x, \hat{p}) k(\varphi) \equiv -ihk \left( V(H) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^i \partial p_i} \right) \varphi \pmod{h^2}.$$

Доказательство основной теоремы будет приведено ниже.

2. Формула коммутации  $1/h$ -псевдодифференциального оператора и быстро осциллирующей экспоненты. Рассмотрим гамильтониан  $H=H(x, p)$  и фиксируем некоторое подмножество  $I$  индексов  $I \subset [n] = \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Предложение 2.4** Для любых функций  $\varphi(x', p_{\bar{I}}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^I \oplus \mathbb{R}_{\bar{I}})$ ,  $S(x', p_{\bar{I}}) \in C^\infty(\mathbb{R}^I \oplus \mathbb{R}_{\bar{I}})$  выполнено сравнение

$$\begin{aligned} H(x', \hat{x}^{\bar{I}}, \hat{p}_I, p_{\bar{I}}) \exp \left\{ \frac{i}{h} S(x', p_{\bar{I}}) \right\} \varphi(x', p_{\bar{I}}) &\equiv \\ &\equiv \left\{ H \left( x', -\frac{\partial S}{\partial p_{\bar{I}}}, \frac{\partial S}{\partial x^I}, p_{\bar{I}} \right) + ih \left[ \frac{\partial H}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial}{\partial p_{\bar{I}}} - \frac{\partial H}{\partial p_I} \frac{\partial}{\partial x^I} - \right. \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^I \partial x^I} \frac{\partial^2 H}{\partial p_I \partial p_I} + \frac{\partial^2 S}{\partial p_{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial^2 H}{\partial x^{\bar{I}} \partial x^{\bar{I}}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^I \partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial^2 H}{\partial x^{\bar{I}} \partial p_I} \right) + \frac{\partial^2 H}{\partial x^{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} \right] \right\} \varphi(x', p_{\bar{I}}) \pmod{h^2}. \end{aligned}$$



Доказательство. По определению имеем

$$\begin{aligned}
 I(\hbar) &= H(x^I, \hat{x}^{\bar{I}}, \hat{p}_I, p_{\bar{I}}) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S(x^I, p_{\bar{I}})\right\} \varphi(x^I, p_{\bar{I}}) = \\
 &= F_{x^I \rightarrow p_{\bar{I}}}^{1/\hbar} \left\{ F_{p_{\bar{I}} \rightarrow x^I}^{1/\hbar} \left[ F_{p_I \rightarrow x^I}^{1/\hbar} H(x^I, x^{\bar{I}}, p_I, p_{\bar{I}}') F_{x^I \rightarrow p_I} \times \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S(x'^I, p_{\bar{I}}')\right\} \varphi(x'^I, p_{\bar{I}}') \right] \right\} = \\
 &= \left(\frac{i}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{|\bar{I}|+|I|}{2}} \left(\frac{1}{2\pi i\hbar}\right)^{\frac{|\bar{I}|+|I|}{2}} \int_{\mathbb{R}^{\bar{I}}} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \langle x^{\bar{I}}, p_{\bar{I}} \rangle\right\} dx^{\bar{I}} \times \\
 &\quad \times \left\{ \int_{\mathbb{R}^{\bar{I}}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \langle p_{\bar{I}}', x^{\bar{I}} \rangle\right\} dp_{\bar{I}}' \times \right. \\
 &\quad \times \int_{\mathbb{R}^I} \left[ \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \langle p_I, x^I \rangle\right\} dp_I H(x^I, x^{\bar{I}}, p_I, p_{\bar{I}}') \times \right. \\
 &\quad \times \left. \int_{\mathbb{R}^I} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \langle x'^I, p_I \rangle + \frac{i}{\hbar} S(x'^I, p_{\bar{I}}')\right\} \varphi(x'^I, p_{\bar{I}}') dx'^I \right] \}. \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

Интеграл (2.17) понимается как повторный и, поскольку соответствующий кратный интеграл расходится, не допускает перестановки пределов интегрирования. Это неудобство мы преодолеем следующим образом. Рассмотрим покрытие пространства

$$\mathbb{R}^{\bar{I}} \oplus \mathbb{R}^I$$

с координатами  $(x^{\bar{I}}, p_I)$  двумя окрестностями, первая из которых представляет собой открытый диск с центром в начале координат:

$$U_1 = \{|x^{\bar{I}}|^2 + |p_I|^2 \leq M + 1/2\}, \quad (2.18)$$

а вторая состоит из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$U_2 = \{M < |x^{\bar{I}}|^2 + |p_I|^2 < \infty\}. \quad (2.19)$$

Если теперь

$$e_1 + e_2 \equiv 1 \quad (2.20)$$

— разбиение единицы, подчиненное покрытию (2.18) — (2.19), то, обозначая через  $H_1$  и  $H_2$  функции  $H_1 = He_1$ ,  $H_2 = He_2$ , мы получим, что интеграл (2.17) разбивается на сумму двух интегралов

$$I(h) = I_1(h) + I_2(h),$$

отвечающих разбиению (2.20).

Оценим вначале интеграл  $I_2(h)$ . Имеем

$$\begin{aligned} I_2(h) &= \frac{1}{(2\pi h)^n} \iint_{\mathbf{R}^{\bar{I}} \times \mathbf{R}^I} \exp \left\{ \frac{i}{h} [\langle p_I, x^I \rangle - \langle x^{\bar{I}}, p_{\bar{I}} \rangle] \right\} dx^{\bar{I}} dp_I \times \\ &\times \iint_{\mathbf{R}^I \times \mathbf{R}^{\bar{I}}} \exp \left\{ \frac{i}{h} [\langle p_{\bar{I}}, x^{\bar{I}} \rangle - \langle x^{I'}, p_I \rangle + S(x^{I'}, p_{\bar{I}}')] \right\} \times \\ &\times H_2(x^I, x^{\bar{I}}, p_I, p_{\bar{I}}') \varphi(x^{I'}, p_{\bar{I}}') dx^{I'} dp_{\bar{I}}'. \end{aligned}$$

Найдем стационарную точку внутреннего интеграла. Фаза этого интеграла равна

$$\langle p_{\bar{I}}, x^{\bar{I}} \rangle - \langle x^{I'}, p_I \rangle + S(x^{I'}, p_{\bar{I}}').$$

Поэтому уравнения для стационарной точки имеют вид

$$\begin{aligned} -p_I + \frac{\partial S(x^{I'}, p_{\bar{I}}')}{\partial x^{I'}} &= 0, \\ x^{\bar{I}} + \frac{\partial S(x^{I'}, p_{\bar{I}}')}{\partial p_{\bar{I}}'} &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Поскольку функция  $S(x^{I'}, p_{\bar{I}}')$  гладкая, то существует такое число  $N$ , что

$$|\max \operatorname{grad}_{x^{I'}, p_{\bar{I}}'} S(x^{I'}, p_{\bar{I}}')| \leq N, \quad (2.22)$$

где  $\max$  в (2.22) берется по всем точкам  $(x^{I'}, p_{\bar{I}}') \in \operatorname{supp} \varphi(x^{I'}, p_{\bar{I}}')$ . Поэтому, если в выражении (2.19)

положить  $M=N+1$ , то система (2.21) решения иметь не будет. Отсюда следует, что

$$I_2(h) \equiv 0 \pmod{h^\infty}.$$

Сосредоточим теперь свое внимание на интеграле  $I_1(h)$ , в котором теперь уже можно менять пределы интегрирования, поскольку интеграл фактически берется по конечной области и, следовательно, является собственным. Запишем его в виде

$$I_1(h) = \left(\frac{1}{2\pi h}\right)^n \iiint \exp \left\{ \frac{i}{h} [\langle x^{\bar{I}}, p_{\bar{I}}' - p_{\bar{I}} \rangle + \langle p_I, x^I - x^{I'} \rangle + \right. \\ \left. + S(x^{I'}, p_{\bar{I}}') \right\} H_1(x^I, x^{\bar{I}}, p_I, p_{\bar{I}}') \Phi(x^{I'}, p_{\bar{I}}') \times \\ \times dx^{\bar{I}} dp_I dx^{I'} dp_{\bar{I}}'. \quad (2.23)$$

Применим к интегралу (2.23) формулу асимптотического разложения. Фаза интеграла (2.23) равна

$$\Phi_i(x^{I'}, x^{\bar{I}}, p_I, p_{\bar{I}}') = \\ = \langle x^{\bar{I}}, p_{\bar{I}}' - p_{\bar{I}} \rangle + \langle p_I, x^I - x^{I'} \rangle + S(x^{I'}, p_{\bar{I}}').$$

Поэтому уравнения для стационарной точки имеют вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^{I'}} = -p_I + \frac{\partial S(x^{I'}, p_{\bar{I}}')}{\partial x^{\bar{I}}} = 0, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_{\bar{I}}'} = x^{\bar{I}} + \frac{\partial S(x^{I'}, p_{\bar{I}}')}{\partial p_{\bar{I}}'} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^{\bar{I}}} = p_{\bar{I}}' - p_{\bar{I}} = 0,$$

(2.25)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_I} = x^I - x^{I'} = 0,$$

Докажем, что система  $\bar{\cdot}$ (2.24) — (2.25) однозначно разрешима относительно  $x^{I'}$ ,  $p_{\bar{I}}'$ ,  $x^{\bar{I}}$ ,  $p_I$ . Действительно, из системы (2.25) следует, что

$$p_{\bar{I}}' = p_{\bar{I}}, \quad x^{I'} = x^I \quad (2.26)$$

и с учетом (2.26) мы получаем следующее решение системы (2.24):

$$p_I = \frac{\partial S}{\partial x^{I'}}(x^I, p_{\bar{I}}), \quad (2.27)$$

$$x^{\bar{I}} = -\frac{\partial S}{\partial p_{\bar{I}}'}(x^I, p_{\bar{I}});$$

Проверим, что стационарная точка (2.26), (2.27) невырождена. Запишем матрицу

$$\text{Hess}_{x^{I'}, x^{\bar{I}}, p_I, p_{\bar{I}}'} \Phi \left( x^I, -\frac{\partial S}{\partial p_{\bar{I}}'}(x^I, p_{\bar{I}}), \frac{\partial S}{\partial x^{I'}}(x^I, p_{\bar{I}}), p_{\bar{I}} \right)$$

подробнее:

	$x^{I'}$	$p_{\bar{I}}'$	$x^{\bar{I}}$	$p_I$	
$x^{I'}$	$\frac{\partial^2 S}{\partial x^{I'} \partial x^{I'}}(x^I, p_{\bar{I}})$	$\frac{\partial^2 S}{\partial x^{I'} \partial p_{\bar{I}}'}(x^I, p_{\bar{I}})$		$-1_I$	
$p_{\bar{I}}'$	$\frac{\partial^2 S}{\partial p_{\bar{I}}' \partial x^{I'}}(x^I, p_{\bar{I}})$	$\frac{\partial^2 S}{\partial p_{\bar{I}}' \partial p_{\bar{I}}'}(x^I, p_{\bar{I}})$	$1_{\bar{I}}$		
$x^{\bar{I}}$		$1_{\bar{I}}$			
$p_I$	$-1_I$				

(2.28)

В матрице (2.28)  $1_I$ ,  $1_{\bar{I}}$  обозначают единичные матрицы размеров  $|I|$  и  $|\bar{I}|$  соответственно, и в незаполненных клетках матрицы стоят нули. Поскольку детерминант матрицы (2.28) равен  $-1$ , она невырождена. Применяя

теперь формулу (1.11) асимптотического разложения интеграла, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \iiint \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [\langle x^{\bar{I}}, p_{\bar{I}}' - p_{\bar{I}} \rangle + \langle p_I, x^I - x^{I'} \rangle + \right. \\ & \quad \left. + S(x^{I'}, p_{\bar{I}}') \right\} H_1(x^I, x^{\bar{I}}, p_I, p_{\bar{I}}') \varphi(x^{I'}, p_{\bar{I}}') \times \\ & \quad \times dx^{\bar{I}} dp_I dx^{I'} dp_{\bar{I}}' \equiv \exp \left( \frac{i}{\hbar} S(x^I, p_{\bar{I}}) \right) \times \\ & \quad \times \left\{ H + i\hbar \left[ \frac{\partial H}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial}{\partial p_{\bar{I}}} - \frac{\partial H}{\partial p_I} \frac{\partial}{\partial x^I} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^I \partial x^I} \frac{\partial^2 H}{\partial p_I \partial p_I} + \frac{\partial^2 S}{\partial p_{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial^2 H}{\partial x^{\bar{I}} \partial x^{\bar{I}}} - \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. - 2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^I \partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial^2 H}{\partial x^{\bar{I}} \partial p_I} \right) + \frac{\partial^2 H}{\partial x^{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} \right] \right\} \varphi(x^I, p_{\bar{I}}) \pmod{\hbar^2}. \quad (2.29) \end{aligned}$$

Здесь значения функции  $S$  и ее производных берутся в точке  $(x^I, p_{\bar{I}})$ , а значения функции  $H$  и ее производных — в точке  $\left(x^I, -\frac{\partial S}{\partial p_{\bar{I}}}, \frac{\partial S}{\partial x^I}, p_{\bar{I}}\right)$ .

Доказательство формулы (2.29) будет дано в главе VI, предложение 2.1. Таким образом, предложение 2.4 доказано.

Пусть теперь  $k_I$  — локальный канонический оператор. Тогда из предложения 2.4 следует, что справедливо сравнение

$$\begin{aligned} H(x, \hat{p}) k_I \varphi & \equiv k_I \left\{ \mu_I^{-1/2} \left( H \left( x^I, -\frac{\partial S_I}{\partial p_{\bar{I}}}, \frac{\partial S_I}{\partial x^I}, p_{\bar{I}} \right) \mu_I^{1/2} + \right. \right. \\ & \quad \left. + i\hbar \mu_I^{-1/2} \left[ \frac{\partial H}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial}{\partial p_{\bar{I}}} - \frac{\partial H}{\partial p_I} \frac{\partial}{\partial x^I} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 S_I}{\partial x^I \partial x^I} \frac{\partial^2 H}{\partial p_I \partial p_I} + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + \frac{\partial^2 S_I}{\partial p_{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial^2 H}{\partial x^{\bar{I}} \partial x^{\bar{I}}} - 2 \frac{\partial^2 S_I}{\partial x^I \partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial^2 H}{\partial x^{\bar{I}} \partial p_I} \right) + \frac{\partial^2 H}{\partial x^{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} \right] \mu_I^{1/2} \right\} \varphi \pmod{\hbar^2}. \end{aligned}$$

**Определение 2.6.** *Оператор умножения на функцию*

$$H\left(x^I, -\frac{\partial S_I}{\partial p_{\bar{I}}}, \frac{\partial S_I}{\partial x^I}, p_{\bar{I}}\right)$$

*называется локальным оператором Гамильтона — Якоби в карте  $U_I$ .*

**Определение 2.7.** *Дифференциальный оператор 1-го порядка*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_I^1 = \mu_I^{-1/2} \left\{ \frac{\partial H}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial}{\partial p_{\bar{I}}} - \frac{\partial H}{\partial p_I} \frac{\partial}{\partial x^I} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 S_I}{\partial x^I \partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial^2 H}{\partial p_I \partial p_{\bar{I}}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial^2 S_I}{\partial p_{\bar{I}} \partial p_I} \frac{\partial^2 H}{\partial x^{\bar{I}} \partial x^I} - 2 \frac{\partial^2 S_I}{\partial x^I \partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial^2 H}{\partial x^{\bar{I}} \partial p_I} \right) + \frac{\partial^2 H}{\partial x^{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} \right\} \mu_I^{1/2} \end{aligned}$$

*называется локальным оператором переноса в карте  $U_I$ .*

3. Доказательство теоремы 2.3. В этом пункте мы будем считать выполненными предположения теоремы 2.3, не оговаривая этого специально.

**Предложение 2.5.** *Локальный оператор Гамильтона — Якоби равен нулю.*

**Доказательство.** По определению функция  $S_I(x^I, p_{\bar{I}})$  является решением уравнения

$$dS_I = i^* [p_I dx^I - x^{\bar{I}} dp_{\bar{I}}].$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial S_I}{\partial x^I} = i^* p_I, \quad \frac{\partial S_I}{\partial p_{\bar{I}}} = -i^* x^{\bar{I}}.$$

Таким образом,

$$H\left(x^I, -\frac{\partial S_I}{\partial p_{\bar{I}}}, \frac{\partial S_I}{\partial x^I}, p_{\bar{I}}\right) = i^* H(x^I, x^{\bar{I}}, p_I, p_{\bar{I}}) = i^* H = 0.$$

Предложение 2.5 доказано.

**Предложение 2.6.** *Локальный оператор переноса  $\mathcal{P}_I^1$  имеет вид*

$$\mathcal{P}_I^1 \varphi = \left[ V(H) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} \right] \varphi, \quad (2.30)$$

где

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^I \partial p_I}.$$

**Доказательство.** Согласно определению 2.7 оператор  $\mathcal{P}_I^1$  равен

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_I^1 = \mu_I^{-1/2} & \left\{ \frac{\partial H}{\partial x^I} \frac{\partial}{\partial p_I} - \frac{\partial H}{\partial p_I} \frac{\partial}{\partial x^I} - \right. \\ & - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 S_I}{\partial x^I \partial x^I} \frac{\partial^2 H}{\partial p_I \partial p_I} + \frac{\partial^2 S_I}{\partial p_I \partial p_I} \frac{\partial^2 H}{\partial x^I \partial x^I} - \right. \\ & \left. \left. - 2 \frac{\partial^2 S_I}{\partial x^I \partial p_I} \frac{\partial^2 H}{\partial x^I \partial p_I} \right) + \frac{\partial^2 H}{\partial x^I \partial p_I} \right\} \mu_I^{1/2}. \quad (2.31) \end{aligned}$$

Из формулы (2.31) следует, что оператор  $\mathcal{P}_I^1$  может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_I^1(\varphi) = & - \left[ V(H_I) - \frac{1}{2} V(H_I) \ln \mu_I \right] \varphi - \\ & - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 S_I}{\partial x^I \partial x^I} \frac{\partial^2 H}{\partial p_I \partial p_I} + \frac{\partial^2 S_I}{\partial p_I \partial p_I} \frac{\partial^2 H}{\partial x^I \partial x^I} - \right. \\ & \left. - 2 \frac{\partial^2 S_I}{\partial x^I \partial p_I} \frac{\partial^2 H}{\partial x^I \partial p_I} \right) \varphi + \frac{\partial^2 H}{\partial x^I \partial p_I} \varphi, \quad (2.32) \end{aligned}$$

где

$$V(H_I) = \frac{\partial H}{\partial p_I} \frac{\partial}{\partial x^I} - \frac{\partial H}{\partial p_I} \frac{\partial}{\partial x^I}.$$

Преобразуем второе слагаемое в выражении (2.32), опираясь на следующую лемму, принадлежащую С. Л. Соболеву.

**Лемма 2.7 (Соболев).** Пусть в  $n$ -мерном пространстве  $\mathbb{R}^n$  с координатами  $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$  заданы векторное поле  $X$  и мера  $\mu$ , удовлетворяющая условию

$$\mathcal{L}_X \mu = 0.$$

Тогда для плотности  $\sigma$  меры  $\mu$  (относительно координат  $\alpha$ ) имеет место следующее равенство:

$$-X\sigma = \sigma \operatorname{div} X. \quad (2.33)$$

**Доказательство.** Пусть поле  $X$  имеет в базисе  $\left(\frac{\partial}{\partial \alpha^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \alpha^n}\right)$  координаты  $X^1, \dots, X^n$ , так что

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial \alpha^i}. \quad (2.34)$$

Дифференцируя меру  $\mu$  вдоль поля (2.34), получим, что

$$\mathcal{L}_X \mu = X \lrcorner \mu + d(X \lrcorner \mu).$$

Поскольку  $d\mu = 0$ , то из последней формулы следует, что  $d(X \lrcorner \mu) = 0$ . Тогда, используя явный вид формы

$$X \lrcorner \mu = X^1 \sigma d\alpha^2 \wedge \dots \wedge d\alpha^n - \\ - X^2 \sigma d\alpha^1 \wedge d\alpha^3 \wedge \dots \wedge d\alpha^n + \dots,$$

получаем

$$d(X \lrcorner \mu) = \left(X^1 \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha^1} + \dots + X^n \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha^n}\right) d\alpha^1 \wedge \dots \wedge d\alpha^n + \\ + \sigma \left(\frac{\partial X^1}{\partial \alpha^1} + \dots + \frac{\partial X^n}{\partial \alpha^n}\right) d\alpha^1 \wedge \dots \wedge d\alpha^n = 0. \quad (2.35)$$

Из (2.35) следует, что

$$X\sigma = -\sigma \operatorname{div} X.$$

Лемма Соболева доказана.

Формуле (2.33) можно придать следующий вид:

$$X(\ln \sigma) = -\operatorname{div} X.$$

Применяя теперь лемму Соболева к векторному полю

$$V(H_I) = \frac{\partial H}{\partial p_I} \frac{\partial}{\partial x^I} - \frac{\partial H}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial}{\partial p_{\bar{I}}}$$

и плотности  $\mu_I$ , получим

$$-V(H_I) \ln \mu_I = \operatorname{div} \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_I}, -\frac{\partial H}{\partial x^{\bar{I}}} \right\} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^I \partial p_I} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial x^{\bar{I}}}{\partial x^I} + \\ + \frac{\partial^2 H}{\partial p_I \partial p_I} \frac{\partial p_I}{\partial x^I} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_I \partial x^I} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^{\bar{I}} \partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial x^{\bar{I}}}{\partial p_{\bar{I}}} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^I \partial p_I} \frac{\partial p_I}{\partial p_{\bar{I}}}.$$



Производные от координатных функций многообразия  $U_I$  по локальным координатам  $x^I, p_I$  мы можем заменить на элементы матрицы гессиана функции  $S_I$  согласно формуле

$$dS_I = i^* (p_I dx^I - x^I dp_I).$$

В результате получим

$$\begin{aligned} -V(H_I) \ln \mu_I &= \frac{\partial^2 H}{\partial p_I \partial x^I} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^I \partial p_I} \frac{\partial^2 S_I}{\partial x^I \partial p_I} + \\ &+ \frac{\partial^2 H}{\partial p_I \partial p_I} \frac{\partial^2 S_I}{\partial x^I \partial x^I} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^I \partial p_I} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^I \partial x^I} \frac{\partial^2 S_I}{\partial p_I \partial p_I} - \\ &- \frac{\partial^2 H}{\partial x^I \partial p_I} \frac{\partial^2 S_I}{\partial x^I \partial p_I}. \quad (2.36) \end{aligned}$$

Подставляя теперь выражение (2.36) в (2.32) и применяя предложение 2.2 (формула (2.14)), мы получим формулу (2.30). Предложение 2.6 доказано.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Предложение 2.8.** Пусть пара  $(L, \mu)$  ассоциирована с гамильтонианом  $H$ . Тогда для любой функции  $\varphi \in C_0^\infty(U_I)$  справедливо сравнение

$$\hat{H}k_I\varphi \equiv -ihk_I \left[ V(H) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} \right] \varphi \pmod{h^2}. \quad (2.37)$$

Приступим теперь к доказательству основной теоремы (теорема 2.3). Пусть  $\varphi \in C_0^\infty(L)$  и  $\sum e_I \equiv 1$  — разбиение единицы, подчиненное каноническому покрытию  $\{U_I\}$ . Тогда в силу линейности оператора  $k$  мы имеем

$$\hat{H}k\varphi = \hat{H}k \sum e_I \varphi = \sum \hat{H}k e_I \varphi.$$

Далее, в силу предложения 2.8

$$\sum \hat{H}k e_I \varphi \equiv -ih \sum k_I i_1^* \left\{ V(H) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} \right\} e_I \varphi \pmod{h^2}.$$

Вычисляя теперь правую часть в выражении (2.37), получаем

$$\begin{aligned} & -ih \sum k_I \left\{ V(H) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} \right\} e_I \varphi = \\ & = -ih \sum k_I e_I \left\{ V(H) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} \right\} \varphi + ih \sum k_I \varphi \{ V(H) e_I \}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Вычисляя вторую группу слагаемых в сумме (2.38) и применяя предложение 1.2, мы получим, что

$$-ih \sum k_I V(H) e_I \equiv 0 \pmod{h^2}.$$

Таким образом, мы получили, что

$$\begin{aligned} \sum \hat{H} k \varphi \pmod{h^2} & \equiv -ih \sum k_I e_I \left\{ V(H) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} \right\} \varphi = \\ & = -ih k \left\{ V(H) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} \right\} \varphi. \end{aligned}$$

Теорема 2.3 полностью доказана.

## Г Л А В А V

### АСИМПТОТИКА ИНТЕГРАЛОВ БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

В этой главе мы получим формулу асимптотического разложения по параметру  $h$  интеграла быстро осциллирующей функции. Эта формула является техническим средством при доказательстве теорем о коцикличности канонического оператора Маслова и его коммутации с быстро осциллирующей экспонентой. При этом чем с большей точностью мы хотим построить теорию, тем больше членов надо уметь вычислять в формуле асимптотического разложения интеграла. Так, в элементарной теории канонического оператора (гл. IV) нам было достаточно первых двух членов разложения. При построении общей теории (гл. VI) необходимо уметь вычислять все члены.

Традиционным в методе получения асимптотического разложения является метод стационарной фазы, идея которого состоит в том, что основной вклад в интеграл дает окрестность стационарной точки его фазы. Этот метод, удобный при теоретических рассуждениях, оказывается, однако, мало пригодным в вычислительном отношении, т. е. при получении явных формул.

С другой стороны, имеется альтернативный подход к построению асимптотического разложения быстро осциллирующей функции — так называемый метод осциллятора. Этот метод позволяет получить явные (рекуррентные) формулы для коэффициентов разложения, хотя теоретическое обоснование его применимости (связанное с оценкой остаточного члена) несколько затруднительно. Здесь мы используем оба метода, проводя все теоретические рассуждения с точки зрения метода стационарной фазы, а формулы для коэффициентов разложения получаем методом осциллятора.

### § 5.1. Формула асимптотического разложения интеграла быстро осциллирующей функции

Рассмотрим вещественнозначную гладкую функцию  $\chi(p)$  от переменных  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_n$  с компактным носителем и комплекснозначные функции  $\varphi(x, p)$ ,  $\Phi(x, p)$  от переменных  $x = (x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$  и  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_n$ , являющиеся аналитическими функциями по переменным  $p$ . Потребуем, чтобы функция  $\Phi(x, p)$  имела неотрицательную мнимую часть на носителе  $\text{supp } \chi$  функции  $\chi(p)$ , т. е.  $\text{Im } \Phi(x, p) \geq 0$  для  $p \in \text{supp } \chi$ . Обозначим через  $\Omega$  множество таких точек  $x \in \mathbb{R}^m$ , что найдется точка  $p \in \mathbb{R}_n$ , для которой выполнены соотношения

$$\text{Im } \Phi(x, p) = 0, \quad (1.1)$$

$$\text{grad}_p \Phi(x, p) = 0. \quad (1.2)$$

Точка  $p \in \mathbb{R}_n$ , удовлетворяющая условиям (1.1) и (1.2), называется вещественной стационарной точкой функции  $\Phi(x, p)$  при фиксированном значении  $x \in \Omega$ .

Потребуем, чтобы уравнение (1.2) имело единственное решение  $p = p(x)$  на носителе функции  $\chi(p)$ , а гессиан по переменным  $p$  функции  $\Phi(x, p)$  в точке  $(x, p(x))$  был невырожден:

$$\det \text{Hess}_p \Phi(x, p(x)) \neq 0.$$

Обозначим через  $\Phi(x, \xi)$  аналитическое продолжение функции  $\Phi(x, p)$ ,  $\xi = p + i\eta$ . Тогда в некоторой окрестности множества  $\Omega$  существует решение  $\xi = \xi(x)$  системы уравнений \*)

$$\Phi_\xi(x, \xi(x)) = 0, \quad (1.3)$$

где

$$\Phi_\xi = \left\{ \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial \xi_n} \right\}.$$

**Теорема 1.1.** Если функции  $\Phi(x, p)$ ,  $\varphi(x, p)$ ,  $\chi(p)$  удовлетворяют перечисленным выше условиям, то имеет

\*) Однозначная разрешимость системы (1.3) будет доказана ниже.

место асимптотическое разложение интеграла

$$\left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{n/2} \int_{R_n} \exp\left\{\frac{i}{h} \Phi(x, p)\right\} \chi(p) \varphi(x, p) dp \equiv \\ \equiv \exp\left\{\frac{i}{h} \Phi(x, \zeta(x))\right\} \sum_{k=0}^N h^k W_k(\Phi, \varphi) \pmod{h^{N+1}}, \quad (1.4)$$

где  $W_k(\Phi, \varphi)$  — функции переменной  $x$ , зависящие от функций  $\Phi(x, \zeta(x))$ ,  $\varphi(x, \zeta(x))$  и производных этих функций до порядков  $2N$  и  $N$  соответственно.

В формуле (1.4), как и ранее, сравнение

$$f(x, h) \equiv 0 \pmod{h^N}$$

означает, что для любого мультииндекса  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq N$ , имеют место неравенства

$$|\hat{p}^\alpha f(x, h)| = C_\alpha(x) h^N$$

с некоторыми положительными гладкими функциями  $C_\alpha(x)$ , убывающими на бесконечности быстрее любой степени\*), зависящими от  $\alpha$  и функции  $f$  (но не зависящими от  $h$ );

$$\hat{p}^\alpha = \left(-ih \frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = (-i)^{|\alpha|} h^{|\alpha|} \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{(\partial x^1)^{\alpha_1} \dots (\partial x^n)^{\alpha_n}}.$$

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что левая часть (1.4) является линейным оператором, примененным к финитной функции  $\chi(p)\varphi(x, p)$ . Следовательно, если это будет необходимо, мы будем считать, что носитель функции  $\varphi$  сколь угодно мал. Теперь доказательство будем вести индукцией по размерности пространства  $R_n$ .

**Базис индукции.** Пусть  $n=1$ . Рассмотрим интеграл

$$I_1(h, x) = \left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{1/2} \int_{R_1} \exp\left\{\frac{i}{h} \Phi(x, p)\right\} \varphi(x, p) dp. \quad (1.5)$$

Уравнение для стационарной точки имеет вид

$$\Phi_\zeta(x, \zeta) = 0. \quad (1.6)$$

\*) То есть  $C_\alpha(x) \in S(\mathbb{R}^m)$ , где  $S(\mathbb{R}^m)$  — пространство Л. Шварца.

Уравнение (1.6) однозначно разрешимо в некоторой окрестности точки  $(x_0, p(x_0))$ , удовлетворяющей условию (1.2). Это утверждение следует из теоремы о неявной функции, поскольку

$$-\Phi_{\xi}(x_0, \xi)|_{\xi=p(x_0)} = \Phi_p(x_0, p(x_0)) \neq 0$$

и

$$-\Phi_{pp}(x_0, p(x_0)) \neq 0,$$

а следовательно, в некоторой окрестности множества  $(x_0, p(x_0))$

$$\Phi_{\xi\xi}(x, \xi) \neq 0.$$

Более того, решение  $\xi(x)$  уравнения (1.6) удовлетворяет условию  $\xi(x) = p(x)$  для  $x \in \Omega$ .

Рассмотрим теперь функцию  $\Phi(x, \xi)$ . Справедливо следующее разложение:

$$\Phi(x, p) = \Phi(x, \xi(x)) + (p - \xi(x))^2 F^{\Phi}(x, p). \quad (1.7)$$

Пусть

$$\xi(x, p) = (p - \xi(x)) \sqrt{F^{\Phi}(x, p)}. \quad (1.8)$$

Поскольку  $F^{\Phi}(x, p)$  в окрестности точки  $(x_0, p(x_0))$  отлична от нуля, выражение (1.8) допускает выделение однозначной ветви\*), и мы зафиксируем некоторый выбор ветви. Отметим, что в рассматриваемой окрестности

$$\frac{d\xi(x, p)}{dp} \neq 0.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\psi(x, p) = \Phi(x, p) \left[ \frac{d\xi}{dp} \right]^{-1}.$$

Функцию  $\psi(x, p)$  можно представить в виде

$$\psi(x, p) = \psi(x, \xi(x)) + (p - \xi(x)) F^{\psi}(x, p). \quad (1.9)$$

Воспользовавшись равенством (1.8), мы можем переписать выражение (1.9) следующим образом:

$$\psi(x, p) = \psi(x, \xi(x)) + \xi \frac{F^{\psi}(x, p)}{\sqrt{F^{\Phi}(x, p)}}. \quad (1.10)$$

\*) На самом деле выражение (1.8) допускает выделение однозначной ветви только локально. Мы, однако, всегда можем считать носитель сирр  $\Phi$  функции  $\Phi$  достаточно малым.

К функции  $\frac{F^\Psi(x, p)}{\sqrt{F^{\Phi^1}(x, p)}}$  можно снова применить разложение по формуле (1.10). Повторяя разложение  $N$  раз, мы получим следующее разложение:

$$\Psi(x, p) = \sum_{k=0}^N \Psi_k(x) \xi^k + \xi^{N+1} F_{N1}^\Psi(x, p). \quad (1.11)$$

Подставляя теперь разложения (1.7), (1.11) с учетом (1.8) в интеграл (1.5), получим, очевидно \*),

$$I_1(x, h) = \left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{i}{h}\Phi(x, \xi(x))\right\} \int_{R_1} \exp\left\{\frac{i}{h}\xi^2(x, p)\right\} \chi(x, p) \times \\ \times \left\{ \sum_{k=0}^N \Psi_k(x) \xi^k \right\} d\xi(x, p) \pmod{h^{N+1}}$$

Здесь  $\chi(x, p)$  — функция с носителем в некоторой окрестности множества  $(x, p(x))$ ,  $x \in \Omega$ .

Рассмотрим выражение

$$\left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{i}{h}\Phi(x, \xi(x))\right\} \int_{R_1} \exp\left\{\frac{i}{h}\xi^2(x, p)\right\} \chi(x, p) d\xi(x, p). \quad (1.12)$$

Этот интеграл можно рассматривать как интеграл по контуру  $\gamma(x)$  в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  (с координатой  $\xi$ ), уравнение которого есть  $\xi = \xi(x, p)$ . Напомним, что  $\Phi(x, p) = \xi^2(x, p) + \Phi(x, \xi(x))$ .

Попробуем отыскать область изменения параметра  $\xi$  так, чтобы в этой области оставалось справедливым неравенство

$$\operatorname{Im} \Phi(x, p) \geq 0.$$

---

\*) Поскольку фаза  $\Phi(x, p)$  не имеет стационарных точек на носителе функции  $[1 - \chi(x, p)]\Phi(x, p)$ , то, интегрируя по частям, мы получим, что

$$\int_{R_1} \exp\left\{\frac{i}{h}\Phi(x, p)\right\} [1 - \chi(x, p)] \Phi(x, p) dp \equiv 0 \pmod{h^\infty}.$$

Более точно, мы покажем, что поскольку  $\chi(x, \rho) \equiv 0$  вне достаточно малой окрестности точки  $\xi = 0$ , то мы можем продолжить контур  $\gamma(x)$  таким образом, чтобы

1) вне достаточно малой окрестности точки  $\xi = 0$  он совпадал с вещественной прямой;

2) на этом контуре

$$\operatorname{Im}[\xi^2 + \Phi(x, \xi(x))] \geq 0; \quad (1.13)$$

3) контур  $\gamma(x)$  непрерывно зависел от  $x$ .

Покажем возможность такого выбора. Начнем с условия 2). Пусть  $U_x$  — область в комплексной плоскости  $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ , в которой выполнено условие (1.13). Имеем

$$\operatorname{Im}[\xi^2 + \Phi(x, \xi(x))] = 2\xi_1 \xi_2 + \operatorname{Im} \Phi(x, \xi(x)).$$

Ниже мы покажем (лемма 1.2), что существует такая постоянная  $C > 0$ , что справедливо неравенство

$$\operatorname{Im} \Phi(x, \xi(x)) \geq C \sum_{i=0}^n [\operatorname{Im} \xi_i(x)]^2. \quad (1.14)$$

Поэтому область в комплексной плоскости  $(\xi_1, \xi_2)$ , в которой выполняется неравенство (1.13), ограничена гиперболой

$$\xi_1 \xi_2 = - \frac{\operatorname{Im} \Phi(x, \xi(x))}{2}$$

с неположительной константой в правой части. При  $x \in \Omega$  область, в которой выполняется неравенство (1.13), есть область  $\xi \in C \mid \xi_1 \xi_2 \geq 0$ , т. е. 1-й и 3-й квадранты. Поэтому контур  $\gamma(x)$  лежит в области  $U_x$  и может быть продолжен однозначно с точностью до гомотопии. Очевидно, выбор контуров  $\gamma(x)$  при  $x \in \Omega$  может быть произведен таким образом, чтобы функция  $\gamma(x)$  непрерывно зависела от  $x$ .

Замечая теперь, что с точностью до  $O(h^\infty)$  функцию  $\chi(x, \rho)$  в интеграле (1.12) можно заменить единицей, и опуская контур  $\gamma(x)$  на вещественную ось (что возможно в силу аналитичности подынтегрального выражения в области  $U_x$ ), получим, что интеграл (1.12) равен

$$\operatorname{const} \exp \left\{ \frac{i}{h} \Phi(x, \xi(x)) \right\}.$$



Рассмотрим теперь выражение

$$\left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{i}{h}\Phi(x, \xi(x))\right\} \int_{R_1} \exp\left\{\frac{i}{h}\xi^2(x, p)\right\} \times \\ \times \xi^j(x, p) \chi(x, p) d\xi(x, p). \quad (1.15)$$

Интегрированием по частям интеграл (1.15) приводится по модулю  $O(h^\infty)$  к интегралу (1.12), умноженному на  $h^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor}$ , после чего применяется описанная выше процедура. Оценка остаточного члена производится также интегрированием по частям с учетом неравенства (1.14). Итак, мы доказали следующую формулу:

$$I_1(x, h) \equiv \sum_{k=0}^N W_k[\Phi, \varphi] h^k \exp\left\{\frac{i}{h}\Phi(x, \xi(x))\right\} (\text{mod } (h^{N+1})). \quad (1.16)$$

Для  $n=1$  теорема доказана.

Пусть теперь формула (1.4) справедлива для пространства  $n-1$  измерения. Докажем ее для пространства  $n$  измерений. Будем рассматривать интеграл  $I_n(x, h)$  в окрестности точки  $x_0 \in \Omega$ :

$$I_n(x, h) = \left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{n/2} \int_{R_n} e^{\frac{i}{h}\Phi(x, p)} \varphi(x, p) dp. \quad (1.17)$$

Мы утверждаем, что невырожденным вещественным линейным преобразованием пространства  $R_n$  можно добиться того, чтобы какой-либо из диагональных элементов матрицы

$$\text{Hess}_p \Phi(x_0, p(x_0))$$

стал отличен от нуля.

Без ограничения общности можно считать, что

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_1^2}(x_0, p(x_0)) \neq 0. \quad (1.18)$$

Вновь обозначая переменные интегрирования через  $p$ , запишем интеграл (1.17) в виде

$$I_n(x, h) = \left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{n-1/2} \int_{R_{n-1}} dp' \left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{1/2} \times \\ \times \int_{R_1} \exp\left\{\frac{i}{h} \Phi(x, p_1, p')\right\} \varphi(x, p_1, p') dp_1. \quad (1.19)$$

Здесь  $p' = (p_2, \dots, p_n)$ , так что  $p = (p_1, p')$ .

Проверим условия теоремы 1.1 для внутреннего интеграла

$$\left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{1/2} \int \exp\left\{\frac{i}{h} \Phi(x, p_1, p')\right\} \varphi(x, p_1, p') dp_1.$$

В этом интеграле переменные  $(x, p')$  являются параметрами, множество  $\tilde{\Omega} = \{(x, p'(x)) : x \in \Omega\}$ . Носитель функции  $\varphi(x, p_1, p')$  по переменным  $p_1$  компактен, а  $\text{Im} \Phi(x, p_1, p') \geq 0$  на носителе функции  $\varphi(x, p_1, p')$  по переменной  $p_1$ . Поскольку уравнение (1.2) имеет единственное решение  $p = p(x)$  на носителе функции  $\varphi(x, p)$ , то уравнение

$$\Phi_{p_1}(x, p_1, p') = 0, \quad x \in \Omega,$$

имеет единственное решение

$$p_1 = p_1(x, p'(x)),$$

а условие (1.18) означает невырожденность гессиана функции  $\Phi(x, p_1, p')$  по переменной  $p_1$ . Обозначим через

$$\xi = \xi(x, p')$$

решение уравнения

$$\Phi_{\xi_1}(x, p', \xi_1) = 0. \quad (1.20)$$

Тогда, применяя формулу (1.16) к внутреннему интегралу, получим

$$\left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{1/2} \int_{R_1} \exp\left\{\frac{i}{h} \Phi(x, p_1, p')\right\} \varphi(x, p_1, p') dp_1 \equiv \\ \equiv \exp\left\{\frac{i}{h} \Phi(x, p', \xi_1(x, p'))\right\} \sum_{k=0}^N h^k W_k^{(1)}[\Phi, \varphi] \pmod{h^{N+1}}.$$

Обозначим

$$\Phi_1(x, p') = \Phi(x, p', \xi_1(x, p')). \quad (1.21)$$

Интеграл (1.19) представляется теперь в виде

$$I_n(x, h) \equiv \sum_{k=0}^N h^k \left( \frac{i}{2\pi h} \right)^{(n-1)/2} \int_{\mathbb{R}_{n-1}} \exp \left\{ \frac{i}{h} \Phi_1(x, p') \right\} \times \\ \times W_k^{(1)}[\Phi, \varphi] dp' \pmod{h^{N+1}}. \quad (1.22)$$

Проверим выполнение условий теоремы 1.1 для интеграла (1.22). Здесь параметрические переменные  $(x)$  и множество  $\Omega$  совпадают с переменными  $(x)$  и множеством  $\Omega$ , введенным в теореме 1.1. Условие на носитель функции типа  $\varphi(x, p')$  выполнено очевидным образом. Условие на мнимую часть фазы  $\Phi_1(x, p')$  вытекает из приведенной ниже леммы 1.2. Остается показать, что система уравнений

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial p_i}(x, p') = 0, \quad i = 2, \dots, n,$$

имеет единственное решение при  $x \in \Omega$ .

В самом деле, если  $x \in \Omega$ , то  $\xi_1(x, p'(x)) = p_1(x)$ .

Далее,

$$\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_i} \right|_{p'=p'(x)} = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}(x, p'(x)) + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}(x, p'(x)) \frac{\partial \xi_1}{\partial p_i} = 0 \quad (1.23)$$

для всех  $i=2, \dots, n$ , поскольку второе слагаемое в (1.23) равно нулю в силу (1.20), а первое — по условию теоремы 1.1.

Проверим выполнение неравенства

$$\det \text{Hess}_{p'} \Phi_1(x_0, p'(x_0)) \neq 0, \quad x_0 \in \Omega.$$

Для этого рассмотрим определитель \*)

$$\det \text{Hess}_p \Phi = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_1^2} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_1 \partial p_2} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_1 \partial p_n} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2 \partial p_1} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2 \partial p_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_n \partial p_1} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_n \partial p_2} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_n^2} \end{vmatrix} \quad (1.24)$$

\*) Все функции в следующих ниже определителях вычисляются в точке  $(x_0, p(x_0))$ .

С определителем (1.24) мы произведем следующие преобразования, очевидно, его не меняющие. Умножим последовательно первый столбец определителя (1.24) на  $\frac{\partial \zeta_1}{\partial p_i}$ ,  $i=2, \dots, n$ , и результат прибавим к  $i$ -му столбцу ( $i=2, \dots, n$ ). В результате получим определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_1^2} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_1 \partial p_2} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial p_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_1 \partial p_n} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial p_n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_1^2} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2 \partial p_1} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2^2} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial p_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_1 \partial p_2} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2 \partial p_n} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial p_n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2 \partial p_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_n \partial p_1} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_n \partial p_2} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial p_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_n \partial p_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_n^2} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial p_n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_n \partial p_1} \end{vmatrix}. \quad (1.25)$$

Далее, дифференцируя тождество (1.20), мы получаем в точке  $p' = p'(x)$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_i \partial p_1} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_1^2} \frac{\partial \zeta_1}{\partial p_i} \equiv 0. \quad (1.26)$$

Таким образом, с учетом (1.26) определитель (1.25) преобразовывается к виду

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2 \partial p_1} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2^2} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial p_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2 \partial p_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2 \partial p_n} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial p_n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_n \partial p_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_n \partial p_1} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_n \partial p_2} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial p_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_n \partial p_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_n^2} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial p_n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_n \partial p_1} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_1^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2^2} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial p_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2 \partial p_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2 \partial p_n} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial p_n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_2 \partial p_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_n \partial p_2} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial p_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_n \partial p_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_n^2} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial p_n} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_n \partial p_1} \end{vmatrix}. \quad (1.27)$$

Преобразуем элементы определителя (1.27), используя производные функции (1.21). Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_i} &= \frac{\partial}{\partial p_i} [\Phi(x, p', \zeta_1(x, p'))] = \\ &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_i}(x, p', \zeta_1(x, p')) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta_1}(x, p', \zeta_1(x, p')) \frac{\partial \zeta_1}{\partial p_i}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Поскольку  $\zeta_1(x, p')$  — стационарная точка функции  $\Phi_1(x, p', \zeta)$  (см. (1.20)), то второе слагаемое (1.28) равно нулю и, следовательно,

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial p_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}(x, p', \zeta_1(x, p')).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_i \partial p_j} \right|_{p'=p'(x)} &= \\ &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_i \partial p_j}(x, p(x)) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_i \partial p_j}(x, p(x)) \frac{\partial \zeta_1}{\partial p_j}(x, p'(x)). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Используя (1.29), мы получаем, что определитель (1.27), равный  $\det \text{Hess}_p \Phi(x, p(x))$ , представляется в любой точке  $x_0 \in \Omega$  в виде

$$\begin{aligned} \det \text{Hess}_p \Phi(x_0, p(x_0)) &= \\ &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_1^2}(x_0, p(x_0)) \det \text{Hess}_{p'} \Phi_1(x_0, p(x_0)) \end{aligned}$$

Теперь из условия  $\det \text{Hess} \Phi(x, p(x)) \neq 0$  теоремы 1.1 непосредственно вытекает, что

$$\det \text{Hess}_{p'} \Phi_1(x_0, p(x_0)) \neq 0.$$

Итак, все условия теоремы 1.1 выполнены, и мы вправе применить индуктивное предположение. Имеем

$$\begin{aligned} &\left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{n-1/2} \int_{R_{n-1}} \exp\left\{\frac{i}{h} \Phi_1(x, p)\right\} W_k[\Phi, \varphi] dp' \equiv \exp \times \\ &\times \left\{\frac{i}{h} \Phi_1(x, \zeta'(x))\right\} \sum_{k'=0}^N h^{k'} W_{k'}^{(n-1)}[\Phi_1, W_k^{(1)}[\Phi, \varphi]] \pmod{h^{N+1}}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

где  $\zeta'(x)$  — решение системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \Phi_1(x, \zeta') = 0, \quad i = 2, \dots, n.$$

С другой стороны,  $\Phi_1(x, \zeta') = \Phi(x, \zeta', \zeta_1(x, \zeta'))$ .

Пусть  $\xi = \tilde{\xi}(x)$  — решение системы (1.6). Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \Phi(x, \zeta'(x), \zeta_1(x, \zeta')) = 0, \quad i = 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_1} \Phi(x, \zeta'(x), \zeta_1(x, \zeta')) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_i} \Phi(x, \tilde{\zeta}'(x), \tilde{\zeta}_1(x)) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Из единственности решения системы (1.6) следует, что

$$\tilde{\zeta}' = \zeta'(x), \quad \tilde{\zeta}_1(x) = \zeta_1(x, \zeta'(x)) \quad (1.31)$$

и поэтому

$$\Phi_1(x, \zeta')|_{\zeta'=\tilde{\zeta}(x)} = \Phi(x, \zeta'(x), \zeta_1(x)) = \Phi(x, \tilde{\zeta}(x)).$$

Подставляя интегралы (1.30) в (1.22), получим

$$\begin{aligned} I_n(x, h) &\equiv \exp\left\{\frac{i}{h} \Phi(x, \tilde{\zeta}(x))\right\} \sum_{k=0}^N \sum_{k'=0}^N h^{k+k'} W_{k'}^{(n-1)}[\Phi_1, W_k^{(1)}[\Phi, \varphi]] \equiv \\ &\equiv \sum_{l=0}^N h^l \sum_{k'+k=l} W_k^{(n-1)}[\Phi_1, W_k^{(1)}[\Phi, \varphi]] \pmod{h^{N+1}}. \end{aligned}$$

Обозначая

$$W_l^{(n)}[\Phi, \varphi] = \sum_{k'+k=l} W_{k'}^{(n-1)}[\Phi_1, W_k^{(1)}[\Phi, \varphi]],$$

получим, снова заменяя  $\tilde{\zeta}(x)$  на  $\zeta(x)$ ,

$$I_n(x, h) \equiv \exp\left\{\frac{i}{h} \Phi(x, \zeta(x))\right\} \sum_{k=0}^N h^k W_k^{(n)}[\Phi, \varphi] \pmod{h^{N+1}}.$$

**Л е м м а 1.2.** *Справедливо неравенство*

$$\operatorname{Im} \Phi(x, \zeta(x)) \geq C \sum_{k=1}^n [\operatorname{Im}(\zeta_k(x))]^2.$$

**Доказательство.** Допустим сначала, что существуют такие функции

$$Q_{ij}(x, p), \quad i \geq j, \quad \operatorname{Re} Q_{ii}(x, p) \neq 0,$$

что для функций

$$\xi_k(x, p) = \sum_{l=k}^n (p_l - \zeta_l(x)) Q_{lk}(x, p) \quad (1.32)$$

выполнено соотношение

$$\Phi(x, p) = \Phi(x, \zeta(x)) + i \left( \sum_{k=1}^n \xi_k^2(x, p) \right). \quad (1.33)$$

В этом случае существуют вещественнозначные функции

$$p = \tilde{p}(x),$$

удовлетворяющие системе уравнений

$$\operatorname{Re} \xi_k(x, \tilde{p}(x)) = 0. \quad (1.34)$$

В самом деле, если  $x \in \Omega$ , то, положив  $\tilde{p}(x) = \zeta(x) = \operatorname{Re} \zeta(x)$ , мы получим, что  $\xi_k(x, \tilde{p}(x)) = 0$ . Далее, в точках  $(x, p(x))$  матрица Якоби системы (1.34) отлична от нуля, значит, решение (1.34) существует и единственно в окрестности множества  $\Omega$ . Подставляя значение  $p = \tilde{p}(x)$  в (1.33), получаем

$$\Phi(x, \tilde{p}(x)) = \Phi(x, \zeta(x)) + i \sum (\operatorname{Im} \xi_k(x, \tilde{p}(x)))^2,$$

т. е.

$$\operatorname{Im} \Phi(x, \zeta(x)) = \operatorname{Im} \Phi(x, \tilde{p}(x)) - \sum_{k=1}^n (\operatorname{Im} \xi_k(x, \tilde{p}(x)))^2. \quad (1.35)$$

Обозначим через  $\xi(x, p)$  столбец из функций  $\xi_k(x, p)$ , через  $Q(x, p)$  — матрицу из функций  $Q_{ij}(x, p)$ . Тогда  $\det \operatorname{Re} Q(x, p) \neq 0$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \xi(x, \tilde{p}(x)) &= -\operatorname{Im}(\zeta(x)) \operatorname{Re} Q(x, p(x)) - \\ &\quad - \operatorname{Im} \zeta(x) \operatorname{Im} Q(x, \tilde{p}(x)) (\operatorname{Re} Q(x, \tilde{p}(x)))^{-1} \times \\ &\quad \times \operatorname{Im} Q(x, \tilde{p}(x)) = -\operatorname{Im} \zeta(x) (\operatorname{Re} Q + \operatorname{Im} Q (\operatorname{Re} Q)^{-1} \operatorname{Im} Q)(x, \tilde{p}(x)). \end{aligned}$$

Поскольку матрица  $Q$  треугольная, то

$$\det(\operatorname{Re} Q + \operatorname{Im} Q (\operatorname{Re} Q)^{-1} \operatorname{Im} Q) \neq 0.$$

Следовательно, существует такая константа  $C > 0$ , что

$$\sum |\operatorname{Im} \xi_k(x, \tilde{p}(x))|^2 \geq C \sum |\operatorname{Im} \zeta_k(x)|^2. \quad (1.36)$$

Подставив в (1.35) условие  $\operatorname{Im} \Phi(x, p) \geq 0$ , (1.31) и (1.36), получаем утверждение леммы 1.2.

Таким образом, осталось только найти функции  $Q_{ij}(x, p)$ . Заметим, что функции  $Q_{ik}(x, p)$  достаточно определить только в окрестности множества точек вида  $x \in \Omega$ ,  $p = p(x)$ . Для построения матрицы  $Q = \|Q_{ij}(x, p)\|$  применим последовательно к переменным  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  формулу разложения (1.7). Тогда

$$\Phi(x, p) = \Phi(x, \zeta(x)) + \sum_{k,l} (p_l - \zeta_l(x))(p_k - \zeta_k(x)) F_{kl}(x, p).$$

Поскольку  $\det \operatorname{Hess}_p \Phi(x, p(x)) \neq 0$ , то  $\det \|F_{kl}(x, p)\| \neq 0$  в окрестности множества  $\Omega$ . Тогда функции (1.32) ищем рекуррентным процессом при приведении квадратичной формы

$$\sum_{k,l} (p_l - \zeta_l(x))(p_k - \zeta_k(x)) F_{kl}(x, p)$$

к диагональному виду. Заметим теперь, что матрица  $Q$  — невырожденная треугольная матрица. Далее, из (1.33) при  $x \in \Omega$  имеем

$$\operatorname{Im} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_l \partial p_m}(x, p) = 2 \operatorname{Re} \sum \frac{\partial \xi_k}{\partial p_l}(x, p) \frac{\partial \xi_k}{\partial p_m}(x, p). \quad (1.37)$$

Пусть вектор  $\lambda = \{\lambda_k\}$  с вещественными координатами таков, что

$$\sum \lambda_k \frac{\partial \operatorname{Re} \xi_l}{\partial p_k}(x, p) = 0. \quad (1.38)$$

Поскольку матрица  $\|Q_{kl}\|$  невырождена, то

$$\sum \lambda_k \frac{\partial \operatorname{Im} \xi_l}{\partial p_k}(x, p) \neq 0. \quad (1.39)$$



Тогда из (1.37), (1.38) и (1.39) получаем, что

$$\sum \lambda_k \lambda_l \frac{\partial^2 \operatorname{Im} \Phi}{\partial p_k \partial p_l} = -2 \sum \lambda_k \frac{\partial \operatorname{Im} \xi_k}{\partial p_k} \lambda_l \frac{\partial \operatorname{Im} \xi_m}{\partial p_l} < 0,$$

что противоречит условию  $\operatorname{Im} \Phi(x, p) \geq 0$ . Следовательно, матрица

$$\left\| \frac{\partial \operatorname{Re} \xi_l}{\partial p_k} \right\|$$

невыврождена, что эквивалентно условию

$$\det \|\operatorname{Re} Q_{kl}\| \neq 0,$$

или

$$\operatorname{Re} Q_{ii}(x, p) \neq 0.$$

**Замечание.** На самом деле мы доказали более сильное неравенство. Именно из (1.35) следует, что

$$\operatorname{Im} \Phi(x, \zeta(x)) \geq \operatorname{Im} \Phi(x, \tilde{p}(x)) + C \sum_{k=1}^n (\operatorname{Im} \zeta(x))^2,$$

где  $\tilde{p}(x)$  — решение уравнения (1.34), вычисленное с помощью равенства (1.32):

$$\tilde{p}(x) = \operatorname{Re} \zeta(x) - \operatorname{Re} Q^{-1} \operatorname{Im} Q \operatorname{Im} \zeta(x).$$

## § 5.2. Метод осциллятора для асимптотического разложения интеграла

1. Основная идея. В этом и двух следующих параграфах будет изложен метод вычисления членов асимптотического разложения интеграла:

$$I(x, y, h) =$$

$$= \left( \frac{i}{2\pi h} \right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}_n} \exp \left\{ \frac{i}{h} (-\langle x, v \rangle + \Phi(y, v)) \right\} \chi(v) \varphi(y, v) dv \quad (2.1)$$

при следующих предположениях (ср. § 5.1):

i) функции  $\Phi(y, v)$  и  $\varphi(y, v)$  — комплекснозначные аналитические функции вещественных переменных  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_n$ ; параметры  $x, y$  суть точки арифмети-

ческих евклидовых пространств  $x \in \mathbb{R}_n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ; функция  $\chi(v)$  — гладкая функция, имеющая компактный носитель;  $\langle x, v \rangle = x^i v_i$ ;

ii) функция  $\Phi(y, v)$  имеет неотрицательную мнимую часть:

$$\operatorname{Im} \Phi(y, v) \geq 0. \quad (2.2)$$

Обозначим через  $\Omega$  множество точек  $(y, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_n$ , которое определяется следующим образом.

Определение 2.1. Точка  $(x, y) \in \Omega$ , если существует такая точка  $v \in \mathbb{R}_n$ , что

$$1) \quad \operatorname{Im} \Phi(y, v) = 0; \quad (2.3)$$

$$2) \quad -x^i + \frac{\partial \Phi}{\partial v_i}(y, v) = 0. \quad (2.4)$$

При этом точка  $v$ , удовлетворяющая (2.3) и (2.4) называется вещественной стационарной точкой,  $v = v(x, y)$ .

iii) Решение уравнения (2.4) единственно на носителе функции  $\chi(v)$ .

iv) Гессиан функции  $\Phi(y, v)$  в точках  $v(x, y)$  невырожден:

$$\det \operatorname{Hess}_v \Phi(y, v(x, y)) \neq 0.$$

Для удобства вычислений мы включим интеграл (2.1) в однопараметрическое семейство интегралов

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, h, t) = & \frac{1}{(2\pi i h \sin t)^{n/2}} \int \exp \left\{ \frac{i}{2h \sin t} [\cos t |x|^2 - \right. \\ & \left. - 2 \langle x, v \rangle + \cos t |v|^2] \right\} \exp \left\{ \frac{i}{h} \Phi(y, v) \right\} \chi(v) \varphi(y, v) dv, \end{aligned} \quad (2.5)$$

параметризованное \*) точками комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  и вычислим коэффициенты асимптотического разложения интеграла (2.5). Обозначим через  $|x|^2$  скалярный квадрат вектора  $x$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ :

$$|x|^2 = \langle x, x \rangle$$

---

\*) В дальнейшем область изменения параметра  $t \in \mathbb{C}$  будет уточнена.

и аналогично через  $|v|^2$  — скалярный квадрат вектора  $v$  в евклидовом пространстве  $R_n$ :

$$|v|^2 = \langle v, v \rangle.$$

Сделаем, прежде всего, два важных замечания.

З а м е ч а н и я. а) В точке  $t = \pi/2$  имеет место следующее равенство:

$$i^n \psi \left( x, y, h, \frac{\pi}{2} \right) = I(x, y, h). \quad (2.6)$$

б) Как показывает прямой подсчет, интеграл (2.5) является решением следующей задачи Коши для уравнения Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\hbar^2 \Delta_x \psi + |x|^2 \psi, \quad (2.7)$$

$$\psi|_{t=0} = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \Phi(x, y) \right\} \chi(x) \varphi(x, y). \quad (2.8)$$

Поэтому для вычисления коэффициентов асимптотического разложения интеграла (2.1) мы поступим следующим образом.

1) Используя метод стационарной фазы, развитый в § 5.1, напомним с неопределенными коэффициентами разложение интеграла (2.5) по степеням  $h$ .

2) Подставим полученное разложение в уравнение (2.7) и начальные условия (2.8). В результате получим некоторое асимптотическое разложение, коэффициенты которого суть результаты применения явно выписываемых дифференциальных операторов к неопределенным коэффициентам, о которых шла речь в 1).

3) Используя уравнение (2.7) и начальные условия (2.8), мы покажем, что коэффициенты полученного в 2) разложения должны быть равны нулю. Это доставляет нам систему дифференциальных уравнений типа Гамильтона — Якоби и переноса, решая которую, мы получим искомые коэффициенты.

в) Для нахождения коэффициентов с помощью решения дифференциальных уравнений, о которых говорилось в 3), необходимо найти область изменения параметра  $t$ , в которой точки  $t=0$  и  $t=\pi/2$  могут быть связаны путем, целиком состоящим из точек, в которых применим метод

стационарной фазы (см. § 5.1). К сожалению, отрезок вещественной оси  $t$ ,

$$0 \leq t \leq \pi/2, \quad \operatorname{Im} t = 0 \quad (2.9)$$

(вообще говоря), не удовлетворяет этому условию: в некоторых точках отрезка (2.9) стационарная точка фазы интеграла (2.5) вырождается. Поиски других путей, соединяющих точки  $t=0$  и  $t=\pi/2$ , приводят к расширению области изменения параметра  $t$  до некоторой области плоскости комплексного переменного и разложения интеграла (2.5) в области комплексного переменного  $t$ . Однако степенная оценка остаточного члена в этой ситуации уже бессмысленна, поскольку в области  $\operatorname{Im} t < 0$  каждый из членов асимптотического разложения, как легко усмотреть, убывает экспоненциально при  $h \rightarrow 0$ . Поэтому естественно попытаться выделить в подынтегральном выражении убывающую экспоненту и применить метод стационарной фазы уже к оставшейся быстро осциллирующей функции.

Приступим к выполнению изложенной программы.

2. Обоснование возможности применения метода стационарной фазы. Прежде всего найдем область в комплексной  $t$ -плоскости, где фаза интеграла (2.5) неотрицательна, т. е.

$$\operatorname{Im} \left[ \frac{\cos t |x|^2 - 2 \langle x, v \rangle + \cos t |v|^2}{\sin t} + \Phi(v, y) \right] \geq 0. \quad (2.10)$$

Поскольку  $\operatorname{Im} \Phi(v, y) \geq 0$ , то фаза интеграла (2.5) неотрицательна, в частности, в точках  $t \in \mathbb{C}$ , удовлетворяющих неравенству

$$\operatorname{Im} \left[ \frac{\cos t |x|^2 - 2 \langle x, v \rangle + \cos t |v|^2}{2 \sin t} \right] \geq 0.$$

Найдем эти точки. Имеем, если  $t = t_1 + it_2$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left[ \frac{|x|^2 \cos t - 2 \langle x, v \rangle + |v|^2 \cos t}{2 \sin t} \right] &= \\ &= \frac{-\operatorname{sh} t_2 (|x|^2 \operatorname{ch} t_2 - 2 \langle x, v \rangle \cos t_1 + |v|^2 \operatorname{ch} t_2)}{2 [\sin^2 t_1 \operatorname{ch}^2 t_2 + \cos^2 t_1 \operatorname{sh}^2 t_2]}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Очевидно, что для неотрицательности функции (2.11) достаточно, чтобы

$$a) \quad \operatorname{sh} t_2 \leq 0; \quad (2.12)$$

б) каждая из квадратичных форм \*)

$$\operatorname{ch} t_2 (v^i)^2 - 2x^i v_i \cos t_1 + \operatorname{ch} t_2 (x^i)^2, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.13)$$

была неотрицательно определена.

Условие б) в свою очередь следует из двух неравенств:

$$б') \quad \operatorname{ch} t_2 \geq 0; \quad (2.14)$$

$$б'') \quad \operatorname{ch}^2 t_2 - \cos^2 t_1 \geq 0. \quad (2.15)$$

Нетрудно проверить, что неравенства (2.12), (2.14) и (2.15) выполняются в области

$$\operatorname{Im} t \leq 0. \quad (2.16)$$

Преобразуем теперь в области (2.16) интеграл (2.5) следующим образом. Найдем экстремум (по  $v$ ) функции

$$\operatorname{Im} \left[ \frac{\cos t |x|^2 - 2 \langle x, v \rangle + \cos t |v|^2}{2 \sin t} \right]. \quad (2.17)$$

В силу формул (2.11) экстремум (2.17) достигается в точке

$$v_0 = v_0(x, t) = \frac{x \cos t_1}{\operatorname{ch} t_2} \quad (2.18)$$

и равен

$$F^*(x, t) = \frac{-\operatorname{sh} t_2 |x|^2 [\operatorname{ch}^2 t_2 + \cos^2 t_1]}{2 \operatorname{ch} t_2 [\sin^2 t_1 \operatorname{ch}^2 t_2 + \cos^2 t_1 \operatorname{sh}^2 t_2]}.$$

Очевидно, (2.18) — точка минимума. Преобразуем теперь интеграл (2.5) к виду

$$\begin{aligned} \psi(x, y, h, t) = & \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{h} F^*(x, t) \right\}}{(2\pi i h \sin t)^{n/2}} \int \exp x \\ & \times \left\{ \frac{i}{h} \left[ \frac{|x|^2 \cos t - 2 \langle x, v \rangle + |v|^2 \cos t}{2 \sin t} - i F^*(x, t) + \Phi(y, v) \right] \right\} \times \\ & \times \chi(v) \varphi(v, y) dv. \quad (2.19) \end{aligned}$$

\*) В (2.13) суммирование по «повторяющимся» индексам не предполагается.

Покажем возможность применения метода стационарной фазы (см. § 5.1) к интегралу (2.19). Отметим прежде всего, что мнимая часть фазы

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}(x, y, v, t) = \\ = \frac{|x|^2 \cos t - 2 \langle x, y \rangle + |v|^2 \cos t}{2 \sin t} - i F^*(x, t) + \Phi(y, v) \end{aligned} \quad (2.20)$$

интеграла (2.19) неотрицательна:

$$\operatorname{Im} \overline{\Phi}(x, y, v, t) \geq 0$$

в силу (2.10) и поскольку функция  $F^*(x, t)$  является минимумом фазы (2.17). Сделаем еще одно замечание об уравнении для стационарной точки фазы (2.20). Это уравнение имеет вид

$$\frac{x^i}{\sin t} = \delta^{ij} v_j \operatorname{ctg} t + \frac{\partial \Phi(y, v)}{\partial v_i}. \quad (2.21)$$

Заметим прежде всего, что если решение  $v = v(x, y, t)$  системы (2.21) существует, то в силу ограниченности функций

$$\frac{\partial \Phi(y, v)}{\partial v_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

на отрезке  $[0, \pi/2]$

$$\left| \frac{\partial \Phi(y, v)}{\partial v_i} \right| < C_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{x^i - \delta^{ij} v_j(x, t, y)}{\sin t}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Другими словами, при  $t \rightarrow 0$

$$x^i - \delta^{ij} v_j(x, t, y) \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.22)$$

В частности,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \delta^{ij} v_j(x, t, y) = x^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.23)$$

и мы будем искать решение системы (2.21) именно в классе функций, удовлетворяющих условию (2.23). Для отыскания функции  $v = v(x, t, y)$  поступим следующим образом. Умножим обе части системы (2.21) на  $\sin t$ . Получим систему

$$\dot{x}^i = \delta^{ij} v_j \cos t + \frac{\partial \Phi(v, y)}{\partial v_i} \sin t, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.24)$$

Заметим теперь, что любое решение системы (2.24) в окрестности  $0 \leq |t| < \delta$  автоматически удовлетворяет условиям (2.22). С другой стороны, в области  $\delta \leq |t| \leq \pi/2$  система (2.24) эквивалентна системе (2.21), так что решения систем (2.24) и (2.21) будут совпадать.

Теперь вычислим множество  $\Omega_i$ . Множество  $\Omega_i$  и, следовательно, стационарные точки фазы (2.4) могут быть получены с помощью следующей процедуры. Рассмотрим некоторую точку  $(x_0, y) \in \Omega_{\pi/2}$ . Тогда согласно определению множества  $\Omega$  существует такая точка  $v_0$ , что

$$\text{Im } \Phi(y, v_0) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v_i}(y, v_0) = x_0^i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.25)$$

Рассмотрим систему Гамильтона для гармонического осциллятора

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \delta^{ij} p_j, \\ \dot{p}_i &= -\delta_{ij} x^j, \\ i &= 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.26)$$

с начальными данными

$$x^i(v_0, y, 0) = \delta^{ij} v_{j0}, \quad (2.27)$$

$$p_i(v_0, y, 0) = \delta^{ij} \frac{\partial \Phi(v_0, y)}{\partial v_{0j}}, \quad (2.28)$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Отметим, что начальные данные (2.28) вещественные.

Предложение 2.1. Если

$$\begin{aligned} x^i &= x^i(v_0, t), \\ p_i &= p_i(v_0, t), \\ i &= 1, \dots, n, \end{aligned}$$

— траектории системы (2.26) с начальными данными (2.27), (2.28), то

$$x(v_0, y, t) \in \Omega_i \quad (2.29)$$

(при этом стационарная точка есть  $v_0$ ). Более того, если  $v_0$  пробегает все стационарные точки для всех значений  $(x_0, y) \in \Omega_{\pi/2}$ , то множество (2.29) исчерпывает все множество  $\Omega_i$ .

Доказательство. Покажем справедливость включения (2.29). Из (2.26), (2.27) и (2.28) имеем

$$x^i(v_0, y, t) = \delta^{ij} v_{0j} \cos t + \frac{\partial \Phi(v_0, y)}{\partial v_{0i}} \sin t, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.30)$$

С другой стороны, прямое дифференцирование по переменным  $v$  фазы (2.4) показывает, что уравнение для стационарных точек имеет вид (2.21) или с учетом последнего замечания — вид (2.24). Поскольку выражения (2.24) и (2.30) совпадают, то выполнено условие 2) определения 2.1 для фазы (2.20). Проверим выполнение условия 1) определения 2.1. Мы покажем, что стационарная точка  $v_0$ , удовлетворяющая уравнению (2.30), является также решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial v_i} \operatorname{Im} \left[ \frac{|x|^2 \cos t - 2 \langle x, v \rangle + |v|^2 \cos t}{2 \sin t} \right] = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.31)$$

т. е. является экстремальной (минимальной) точкой функции (2.17) и, следовательно, совпадает с точкой (2.18). Отсюда будет следовать, что

$$\operatorname{Im} \left. \frac{|x|^2 \cos t - 2 \langle x, v \rangle + |v|^2 \cos t}{2 \sin t} \right|_{v=v_0} = F^*(x, t)$$

и вместе с (2.25) мы получим, что

$$\Phi(y, t, v, x)|_{v=v_0} = 0,$$

т. е. выполнено из условия 1) определения 2.1.

Покажем теперь, что точка  $v$  является решением уравнения (2.31). Пусть  $v$  при данном  $x \in \Omega_i$  — стационарная



точка. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial v_j} \left[ \frac{|x|^2 \cos t - 2 \langle x, v \rangle + |v|^2 \cos t}{2 \sin t} - iF^*(x, t) + \Phi(v, y) \right] = 0.$$

Поскольку  $\operatorname{Im} \Phi(v, y) \geq 0$ , то

$$\operatorname{Im} \frac{\partial \Phi(v, y)}{\partial v_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial v_i} \operatorname{Im} \left[ \frac{|x|^2 \cos t - 2 \langle x, v \rangle + |v|^2 \cos t}{2 \sin t} \right] = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Последнее уравнение совпадает с уравнением (2.31).

Таким образом, решение уравнения (2.30) действительно удовлетворяет уравнению (2.31). Используя решение (2.18) уравнения (2.31), неявное выражение для стационарной точки фазы (2.20) можно представить в следующем виде:

$$v(x(y, v, t), t) = \frac{x(v, t) \cos t_1}{\operatorname{ch} t_2}. \quad (2.32)$$

Докажем теперь вторую часть утверждения предложения 2.1. Пусть  $(x_0, y) \in \Omega_t$ . Согласно определению 2.1 это означает, что существует такая точка  $v_0$ , что

$$1) \quad \operatorname{Im} \bar{\Phi}(v_0, t, x_0, y) = 0; \quad (2.33)$$

$$2) \quad \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial v_i}(v_0, t, x_0, y) = 0. \quad (2.34)$$

Из (2.33) следует, в частности, что

$$\operatorname{Im} \Phi(y, v_0) = 0.$$

Выражение (2.34) более подробно записывается в виде

$$x_0^i = \delta^{ij} v_{0j} \cos t + \frac{\partial \Phi(v_0, y)}{\partial v_{0i}} \sin t.$$

Обозначив

$$x_t^i = \operatorname{Re} \frac{x_0^i - \delta^{ij} v_{0j} \cos t}{\sin t},$$

имеем

$$x_t^i = \frac{\partial \Phi(y, v_0)}{\partial v_{0i}}.$$

Следовательно,  $(x_t, y) \in \Omega_t$ . Предложение 2.1 доказано полностью.

Покажем теперь, что стационарные точки (2.32) фазы (2.20) невырождены. Мы показали, что у фазы (2.20) имеется такое множество  $\Omega_t \neq \emptyset$ , что для всякого  $x \in \Omega_t$  существует вещественная стационарная точка  $v$  при всех  $t$ ,  $\operatorname{Im} t \leq 0$ . Докажем, что в области  $\operatorname{Im} t \leq 0$ , исключая, быть может, некоторое конечное множество точек \*) на интервале

$$0 < \operatorname{Re} t < \pi/2, \quad \operatorname{Im} t = 0, \quad (2.35)$$

якобиан равен

$$J(t, v, y) = \det \left\| \delta^{ij} \operatorname{ctg} t + \frac{\partial^2 \Phi(y, v)}{\partial v_i \partial v_j} \right\| \neq 0. \quad (2.36)$$

Действительно, уравнение (2.36) можно считать вековым (характеристическим) для матрицы

$$\left\| \frac{\partial^2 \Phi(y, v)}{\partial v_i \partial v_j} \right\|. \quad (2.37)$$

Пусть  $\mu_i(y, v)$  — собственные значения матрицы (2.37). Тогда нужное утверждение будет доказано, если мы покажем, что уравнение

$$\operatorname{ctg} t = -\mu_j(v, y) \quad (2.38)$$

(относительно параметра  $t$ ) имеет в области  $\operatorname{Im} t \leq 0$  не более чем конечное число корней на интервале (2.35).

Для доказательства этого утверждения заметим, что собственные числа матрицы гессиана функции  $\Phi(v, y)$ , удовлетворяющей условию (2.2), расположены в верхней полуплоскости (включая вещественную ось):

$$\operatorname{Im} \mu_j(v, y) \geq 0$$

и, следовательно \*\*),

$$\operatorname{sgn}[-\operatorname{Im} \mu_j(v, y)] = -1.$$

\*) В действительности, как будет видно, это множество состоит не более чем из  $n$  точек.

\*\*) Мы считаем, что  $\operatorname{sgn} x = 1$ ,  $x \geq 0$ , и  $\operatorname{sgn} x = -1$ ,  $x < 0$ .

С другой стороны, полагая  $t = t_1 + it_2$ , получим

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \operatorname{ctg} t &= \operatorname{sgn} \left[ \operatorname{Im} \frac{\cos t_1 \operatorname{ch} t_2 - i \sin t_1 \operatorname{sh} t_2}{\sin t_1 \operatorname{ch} t_2 + i \cos t_1 \operatorname{sh} t_2} \right] = \\ &= \operatorname{sgn} (\cos t_1 \operatorname{ch} t_2 - i \sin t_1 \operatorname{sh} t_2) (\sin t_1 \operatorname{ch} t_2 - i \cos t_1 \operatorname{sh} t_2) = \\ &= \operatorname{sgn} [-\operatorname{sh} t_2 \operatorname{ch} t_2] = 1 \end{aligned}$$

в области  $t_2 < 0$ . Таким образом, решения уравнения (2.38) в области  $t_2 < 0$  не существует. На интервале (2.35) мы имеем следующее уравнение:

$$\operatorname{ctg} t = -\mu_j(v, y), \quad \operatorname{Im} t = 0. \quad (2.39)$$

Пусть  $\mu_j$  вещественно (в противном случае уравнение (2.39) решений не имеет). Тогда уравнение (2.39) имеет на интервале (2.35) ровно одно решение

$$t = t_j = -\operatorname{arctg} \mu_j(v, y).$$

Поскольку  $i = 1, \dots, n$ , то всегда на интервале (2.35) будет не более чем  $n$  точек  $t_1, \dots, t_n$  — нулей якобиана (2.36).

Обозначим через  $\Gamma$  множество точек  $t \in \mathbb{C}$ , удовлетворяющих следующим условиям:

- 1)  $\operatorname{Im} t \leq 0$ ;
- 2)  $t \neq t_i, \quad i = 1, \dots, n$ .

Выше мы показали, что для  $t \in \Gamma$  выполнены все условия теоремы 1.1 и, следовательно, в области  $\Gamma$  мы можем написать следующую формулу асимптотического разложения интеграла:

$$\begin{aligned} \psi^*(x, y, h, t) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi i h \sin t)^{n/2}} \int \exp \left\{ \frac{i}{h} \left[ \frac{|x|^2 \cos t - 2 \langle x, v \rangle + |v|^2 \cos t}{2 \sin t} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i F^*(x, t) + \Phi(y, v) \right] \right\} \chi(v) \varphi(v, y) dv. \end{aligned}$$

Именно, согласно теореме 1.1 существуют такие функции

$$S(x, t, y), \quad \psi_k(x, t, y), \quad k = 1, \dots, N,$$

что

$$\psi^*(x, t, h, y) \equiv \exp \left\{ \frac{i}{h} S^*(x, t, y) \right\} \sum_{k=0}^N h^k \psi_k(x, t, y) \pmod{h^{N+1}}.$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$z^i = \delta^{ij} \omega_j \cos t + \frac{\partial \Phi(\omega, y)}{\partial \omega_i} \sin t, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.40)$$

где

$$z^j = x^j + iy^j, \quad \omega_j = v_j + ir_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Из изложенного выше следует, что существует единственное решение

$$\omega_j = \omega_j(z, y, t), \quad j = 1, \dots, n,$$

уравнений (2.40) для комплексных точек  $z$ , лежащих в некоторой (комплексной) окрестности множества  $\Omega_t$ .

### § 5.3. Вычисление членов асимптотического разложения

Введем следующие определения.

**Определение 3.1.** Действием  $S$  мы будем называть аналитическую в  $\Gamma$  функцию

$$\begin{aligned} S(z, t, y, v(x, t, y)) = \\ = \left\{ \Phi(y, \omega(t, z, y)) + \frac{1}{2 \sin t} [\cos t |z|^2 - 2 \langle x, \omega(t, z, y) \rangle + \right. \\ \left. + \cos t |\omega(t, z, y)|^2] \right\}. \quad (3.1) \end{aligned}$$

**Определение 3.2.** Якобианом  $J$  мы будем называть аналитическую в  $\Gamma$  функцию

$$J(t, y, \omega(t, z, y)) = \det \left\| \delta^{ij} \cos t + \sin t \frac{\partial^2 \Phi(y, \omega(t, z, y))}{\partial \omega_i \partial \omega_j} \right\|. \quad (3.2)$$

Определение 3.3. Определим аргумент  $\text{Arg } J$  якобиана  $J$  как однозначную функцию с помощью следующих свойств:

$$1) \quad \text{Arg } J(0, y, v(x, 0, y)) = 0; \quad (3.3)$$

2)  $\text{Arg } J(t_0, y, v(x, t_0, y))$  для любой точки  $t_0 \in \Gamma$  равен приращению

$$\text{Var}_{t \in \gamma[0, t_0]} \text{Arg } J \quad (3.4)$$

непрерывной функции  $\text{Arg } J$  вдоль любого пути  $\gamma[0, t_0]$ , соединяющего точки  $t=0$  и  $t=t_0$  и лежащего в  $\Gamma$ .

З а м е ч а н и я. а) Поскольку якобиан (3.2) не обращается в нуль в  $\Gamma$ , а  $\Gamma$  — односвязная область, то определение (3.3) корректно, т. е.  $\text{Arg } J(x, t_0, y)$  не зависит от пути  $\gamma[0, t_0]$ , соединяющего точки  $t=0$  и  $t=t_0$ .

б) В области  $\Gamma$  корректно определена аналитическая функция

$$J^{-1/2}(t, y, w(t, z, y)). \quad (3.5)$$

Определим теперь аналитические в  $\Gamma$  функции  $\varphi_k(w, t)$ ,  $k=0, \dots, N$ , следующим рекуррентным способом:

$$\varphi_0 = \varphi(y, w),$$

$$\begin{aligned} \varphi_k(y, t, w) = \frac{i}{2} \int_0^t J^{-1/2}(y, t', w) \Delta_z J^{-1/2}(y, t', w) \times \\ \times \varphi_{k-1}(y, t', w) dt', \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$\Delta_z = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z^i{}^2}, \quad \frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{\partial w_j(t, z, y)}{\partial z^i} \frac{\partial}{\partial w_j}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.7)$$

Функции  $w_j = w_j(z, t, y)$  определяются из соотношения

$$z^i(w, y, t) = \delta^{ij} w_j \cos t + \frac{\partial \Phi(w, y)}{\partial w_i} \sin t, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.8)$$

и подставляются в (3.6).

**Теорема 3.1.** Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда имеет место следующее сравнение:

$$\begin{aligned} I(x, y, h) &= \\ &= \left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{n/2} \int \exp\left\{\frac{i}{h} [-\langle x, v \rangle + \Phi(v, y)]\right\} \chi(v) \varphi(v, y) dv \equiv \\ &\equiv \frac{\exp\left\{\frac{i}{h} S\left(x, y, \frac{\pi}{2}, w\left(x, \frac{\pi}{2}, y\right)\right)\right\}}{\sqrt{\det \text{Hess}\left(-\Phi\left(y, w\left(x, \frac{\pi}{2}, y\right)\right)\right)}} \times \\ &\quad \times \sum_{k=1}^N h^k \varphi_k\left(x, w\left(x, \frac{\pi}{2}, y\right)\right) \pmod{h^{N+1}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \arg i &= \pi/2, \quad \arg \det \text{Hess}\left(-\Phi\left(y, w\left(x, \frac{\pi}{2}, y\right)\right)\right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \arg \lambda_k\left(y, w\left(x, \frac{\pi}{2}, y\right)\right), \end{aligned}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — собственные числа матрицы гессиана

$$\text{Hess}\left(-\Phi\left(y, w\left(x, \frac{\pi}{2}, y\right)\right)\right),$$

причем  $-\frac{3}{2}\pi < \arg \lambda_k \leq \frac{\pi}{2}$  и функции  $S(z, y, t, w)$ ,  $\varphi_k(z, y, w)$  определены по формулам (3.1) и (3.6).

**Доказательство.** Запишем разложение интеграла в виде

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t, h) &= R[\psi(z, y, t, h)] = \\ &= R \exp\left\{\frac{i}{h} S(z, y, t)\right\} J^{-1/2}(z, y, t) \sum_{k=0}^N \varphi_k(z, y, t), \quad (3.9) \end{aligned}$$

где  $R$  — операция ошестствления аргументов  $z$ :

$$Rf(z, y, t) = f(x, y, t)$$

для любой аналитической по переменным  $z$  функции  $f(z, y, t)$ .

Легко видеть, что справедлива следующая формула коммутации:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} R = R \frac{\partial}{\partial z^i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.10)$$

т. е. для любой аналитической по  $z$  функции  $f(z, t, y)$  имеет место равенство

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z^i} f \right] (x, y, t) = \frac{\partial}{\partial x^i} [f(x, y, t)], \quad i = 1, \dots, n,$$

Подставим теперь разложение (3.1) в уравнение (2.7). Учитывая (3.9), получим

$$\begin{aligned} \left[ -ih \frac{\partial}{\partial t} + h^2 \Delta_x - |x|^2 \right] (R\psi)(x, y, t, h) = \\ = R \left[ -ih \frac{\partial}{\partial t} + h^2 \Delta_z - z^2 \right] \psi(z, y, t, h). \end{aligned}$$

(Через  $z^2$  мы обозначаем квадрату  $(z^1)^2 + \dots + (z^n)^2$ . Это же относится и к  $\omega^2 = \omega_1^2 + \dots + \omega_n^2$ , и, вообще,  $(z, \omega) = z^i \omega_i$ .)

Обозначая для краткости

$$S = S(z, y, t), \quad \varphi_k = \varphi_k(z, y, t), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

получим для  $\left( -ih \frac{\partial}{\partial t} + h^2 \Delta_z - z^2 \right) \psi(z, y, t, h)$  следующее выражение:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial S}{\partial t} \exp\left(\frac{i}{h} S\right) J^{-1/2} \left( \sum_{k=0}^N h^k \varphi_k \right) + ih \frac{\partial}{\partial t} (J^{-1/2}) \exp\left(\frac{i}{h} S\right) \times \\ \times \left( \sum_{k=0}^N h^k \varphi_k \right) + ih \exp\left(\frac{i}{h} S\right) J^{-1/2} \frac{\partial}{\partial t} (\Sigma h^k \varphi_k) - \\ - \frac{1}{2} (\nabla S)^2 \exp\left(\frac{i}{h} S\right) J^{-1/2} (\Sigma h^k \varphi_k) + \frac{ih}{2} \Delta S \exp\left(\frac{i}{h} S\right) J^{-1/2} \times \\ \times (\Sigma h^k \varphi_k) - 2 \left( -\frac{ih}{2} \right) \exp\left(\frac{i}{h} S\right) \{ (\Sigma h^k \varphi_k) (\nabla S \nabla J^{-1/2}) - \\ - J^{-1/2} (\nabla S, \nabla \Sigma h^k \varphi_k) \} + \frac{h^2}{2} \exp\left(\frac{i}{h} S\right) \Delta J^{-1/2} \times \\ \times (\Sigma h^k \varphi_k) - \frac{1}{2} z^2 \exp\left(\frac{i}{h} S\right) J^{-1/2} (\Sigma h^k \varphi_k), \end{aligned}$$

где  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^n} \right)$ , или

$$\begin{aligned} & - \exp \left( \frac{i}{h} S \right) J^{-1/2} (\Sigma h^k \varphi_k) \left[ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} ((\nabla S)^2 + z^2) \right] + \\ & + i h \exp \left( \frac{i}{h} S \right) (\Sigma h^k \varphi_k) \left[ \frac{\partial}{\partial t} J^{-1/2} + \frac{1}{2} \Delta S \Delta J^{-1/2} + \right. \\ & + (\nabla S, \nabla J^{-1/2}) \left. \right] + i h \exp \left( \frac{i}{h} S \right) J^{-1/2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\Sigma h^k \varphi_k) + \right. \\ & + (\nabla S, \nabla \Sigma h^k \varphi_k) \left. \right] + \frac{h^2}{2} \exp \left( \frac{i}{h} S \right) \Delta J^{-1/2} (\Sigma h^k \varphi_k). \end{aligned}$$

Лемма 3.2. Функция (3.1) является решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} ((\nabla S)^2 + z^2) &= 0, \quad t > 0, \\ S|_{t=0} &= \Phi(x, y). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Доказательство. Действительно, подставляя (3.1) в (3.11), имеем

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial w_i} \frac{\partial w_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{\partial S}{\partial w_i} \frac{\partial w_i}{\partial z} \right)^2 + z^2. \quad (3.12)$$

Из равенства (3.1) следует, что

$$\frac{\partial S(y, w)}{\partial w_i} = - \frac{z^i}{\sin t} + \operatorname{ctg} t \delta^{ij} w_j + \frac{\partial \Phi(y, w)}{\partial w_i},$$

что вместе с равенством (3.8) приводит к соотношению

$$\frac{\partial S(w, y)}{\partial w_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Поэтому уравнение (3.12) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 + z^2 \right) = 0, \quad (3.13)$$

причем в (3.13) дифференцирование производится лишь по переменным, от которых функция  $S(z, t, w(t, z, y), y)$  зависит явно (т. е. по первым двум группам переменных). Теперь нужное равенство получается прямой



подстановкой (аргументы у функции  $w$  мы опускаем):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[ -\frac{z^2}{\sin^2 t} + 2 \langle z, w \rangle \frac{\cos t}{\sin^2 t} - \frac{w^2}{\sin^2 t} \right] + \\ & \quad + \frac{1}{2} \left\{ \left[ \operatorname{ctg} tz - \frac{w}{\sin t} \right]^2 + z^2 \right\} = \\ & = \frac{1}{2} \left[ -\frac{z^2}{\sin^2 t} + 2 \langle z, w \rangle \frac{\cos t}{\sin^2 t} - \frac{w^2}{\sin^2 t} \right] + \\ & \quad + \frac{1}{2} \left[ \frac{z^2}{\sin^2 t} - 2 \langle z, w \rangle \frac{\cos t}{\sin^2 t} + \frac{w^2}{\sin^2 t} \right]. \end{aligned}$$

Покажем, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} S(z, t, w(t, z, y)) = \Phi(y, z).$$

Из формулы (2.40) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \delta^{ij} w_j(z, t, y) = z^i, \quad i = 1, \dots, n,$$

и, таким образом,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(y, w(t, z, y)) = \Phi(y, z).$$

Далее, выражение

$$\cos tz^2 - 2 \langle z, w(z, t, y) \rangle + \cos tw^2(z, t, y)$$

при  $t \rightarrow 0$  мы представим в виде

$$|z|^2 - 2 \langle z, w(z, t, y) \rangle + |v|^2 + O(t^2)$$

(поскольку при  $t \rightarrow 0$   $\cos t = 1 + O(t^2)$ ). Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2 \sin t} [\cos tz^2 - 2 \langle z, w(z, t, y) \rangle + \cos tw^2] = \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(z - w(t, z, y))^2}{2 \sin t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{O(t^2)}{2 \sin t}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

В силу (2.40)

$$z^i - \delta^{ij} w_j(t, z, y) = O(\sin t) \quad \text{при } t \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

поэтому оба слагаемых в (3.14) исчезают при  $t \rightarrow 0$ .

**Лемма 3.3.** Функция (3.5) удовлетворяет в области  $\Gamma$  уравнению

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla S + (\nabla S, \nabla) \right] J^{-1/2} = 0. \quad (3.15)$$

**Доказательство.** Заметим прежде всего, что якобиан (3.2) является якобианом динамической системы

$$\dot{z} = H_z(z, \zeta), \quad \dot{\zeta} = -H_\zeta(z, \zeta),$$

где

$$H(z, \zeta) = z^2 + \zeta^2.$$

Следовательно, якобиан (3.2) равен

$$J = \det \left\| \frac{\partial z^i(\omega, y, t)}{\partial \omega_j} \right\|,$$

где  $z^i = z^i(\omega, t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , — «физическая» компонента траекторий системы

$$\dot{z}^i = \frac{\partial H}{\partial \zeta_i}(z, \zeta),$$

$$\dot{\zeta}_i = -\frac{\partial H}{\partial z^i}(z, \zeta).$$

Действительно, «физическая» компонента траекторий динамической системы

$$\dot{z}^i = \frac{\partial H}{\partial \zeta_i}, \quad \dot{\zeta}_i = -\frac{\partial H}{\partial z^i}, \quad (3.16)$$

$$z^i(0) = \delta^{ij} \omega_j, \quad \zeta_i(0) = \delta_i^j \frac{\partial \Phi(\omega, y)}{\partial \omega^j}$$

равна

$$z^i(t, \omega) = \delta^{ij} \omega_j \cos t + \frac{\partial \Phi(\omega, y)}{\partial \omega_i} \sin t, \quad i = 1, \dots, n.$$

Поэтому якобиан системы равен

$$J(y, \omega, t) = \det \left\| \frac{\partial z^i(t, \omega)}{\partial \omega_j} \right\| = \det \left\| \delta^{ij} \cos t + \frac{\partial^2 \Phi(\omega, y)}{\partial \omega_i \partial \omega_j} \sin t \right\|$$

и, следовательно, значение (3.13) в точке  $\omega = \omega(t, z, y)$  в точности совпадает с функцией (3.2).

Теперь для доказательства соотношения (3.15) мы воспользуемся леммой С. Л. Соболева для якобиана

$J(t, y, w(t, z, y))$  системы

$$\dot{z}^i = \frac{\partial H}{\partial \zeta_i}(z, \zeta(t, w(t, z, y))), \quad i = 1, \dots, n,$$

где

$$\zeta = \zeta(t, w) = \cos t \frac{\partial \Phi(w, y)}{\partial w} - w \sin t$$

— импульсная компонента траектории системы (3.16).  
Итак, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln J &= \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \zeta_i} \frac{\partial}{\partial z^i} \right] \ln J(y, t, w(t, z, y)) = \\ &= \frac{\partial}{\partial z^i} \frac{\partial H}{\partial \zeta_i}(z, \zeta(t, w(t, z, y))). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Из (3.17) немедленно следует, что

$$\frac{dJ^{-1/2}}{dt} + \frac{1}{2} J^{-1/2} \frac{\partial}{\partial z^i} \frac{\partial H}{\partial \zeta_i} = 0. \quad (3.18)$$

Поскольку  $H = z^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 + z^2 \right\}$ , то  $\frac{\partial H}{\partial \zeta_i} = \nabla S$  и

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \zeta_i} \frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{\partial}{\partial t} + (\nabla S, \nabla). \quad \text{Далее,}$$

$$\frac{\partial}{\partial z^i} \frac{\partial H}{\partial \zeta_i} = \Delta S. \quad (3.19)$$

Поэтому уравнение (3.15) преобразуется к виду

$$\left[ \frac{d}{dt} + \frac{1}{2} \Delta S \right] J^{-1/2} = 0. \quad (3.20)$$

Согласно формулам (3.18) и (3.19) функция (3.5) удовлетворяет уравнению (3.20).

**Лемма 3.4.** *Функции (3.6) удовлетворяют следующей рекуррентной системе:*

$$\frac{d}{dt} \varphi_k = \frac{i}{2} J^{1/2} \Delta J^{-1/2} \varphi_{k-1}, \quad k \geq 1,$$

$$\varphi_k|_{t=0} = 0, \quad \varphi_0 = \varphi.$$

Здесь

$$\Phi_k = \Phi_k(y, t, \omega(t, z, y)), \quad J = J(y, t, \omega(t, z, y)),$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{(\partial z^i)^2} \text{ (см. (3.6), (3.7)), } \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\nabla S, \nabla).$$

Доказательство очевидно.

Теперь, применяя оператор  $R$ , мы получим утверждение теоремы 3.1, касающееся фазы  $S$  и функций

$$\Phi_k, \quad k=0, 1, \dots, N.$$

Установим справедливость формулы для аргумента гессiana фазы.

Л е м м а 3.5.

$$\text{Var arg det } J(y, t, v(t, x, y)) = \sum_{k=1}^n \mu_k(y, x),$$

где  $\mu_1(y, x), \dots, \mu_n(y, x)$  — собственные значения матрицы

$$\text{Hess}_v(\Phi(y, v(x, \frac{\pi}{2}, y)))$$

$$u - \frac{\pi}{2} < \mu_k \leq \frac{3}{2} \pi.$$

Доказательство. Пусть

$$\mu_1(y, v(x, y, t)), \dots, \mu_n(y, v(x, y, t))$$

— собственные значения матрицы

$$\left\| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v_i \partial v_j}(y, v(x, t, y)) \right\|.$$

Тогда определитель

$$\det \left\| \delta^{ij} \cos t + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v_i \partial v_j}(y, v(x, t, y)) \sin t \right\|$$

равен произведению

$$\begin{aligned} J(t) = J(t, y, v(t, x, y)) &= \\ &= \prod_{k=1}^n (\cos t + \mu_k(y, v(x, t, y)) \sin t). \end{aligned}$$

Обозначим

$$z_k(t) = z_k(t, y, v(t, x, y)) = \cos t + \mu_k(y, v(t, x, y)) \sin t$$

и определим  $\arg z_k(0)$  и  $J(0) = \prod_{k=1}^n z_k(0)$ , полагая  $\arg z_k(0) = 0$ . Тогда в силу определения 3.3 на любом пути  $\gamma(t) \in \Gamma$  имеем

$$\operatorname{Arg} J(t) = \arg \prod_{k=1}^n z_k(t) = \sum_{k=1}^n \arg z_k(t).$$

Заметим теперь, что если  $t \in \Gamma$ , то

$$\operatorname{Im} z_k(t) \geq 0. \quad (3.21)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} z_k(t) &= \operatorname{Im} [\cos(t_1 + it_2) + (\mu_k^1 + i\mu_k^2) \sin(t_1 + it_2)] = \\ &= \operatorname{Im} [\cos t_1 \operatorname{ch} t_2 - i \sin t_1 \operatorname{sh} t_2 + (\mu_k^1 + i\mu_k^2) \times \\ &\quad \times (\sin t_1 \operatorname{ch} t_2 + i \cos t_1 \operatorname{sh} t_2)] = \\ &= -\sin t_1 \operatorname{sh} t_2 + \mu_k^1 \cos t_1 \operatorname{sh} t_2 + \mu_k^2 \sin t_1 \operatorname{ch} t_2 = \\ &= -\operatorname{sh} t_2 (\sin t_1 - \mu_k^1 \cos t_1) + \mu_k^2 \sin t_1 \operatorname{ch} t_2. \end{aligned}$$

Поскольку в  $\Gamma$  а)  $\sin t_1 - \mu_k \cos t_1 \geq 0$ , б)  $\operatorname{sh} t_2 \leq 0$ , в)  $\operatorname{ch} t_2 \geq 0$ , г)  $\sin t_1 \geq 0$ , д)  $\mu_k^2 \geq 0$ , то неравенство (4.21) выполнено. Поэтому на комплексной плоскости мы можем сделать разрез  $(0, -i\infty)$ , т. е. определить  $-\pi/2 \leq \arg z_k(t) < 3\pi/2$ . Далее, поскольку  $z_k(\pi/2) = \mu_k$ , то при  $t = \pi/2$  мы имеем

$$\operatorname{Arg} J(\pi/2) = \sum_{k=1}^n \arg \mu_k,$$

где

$$-\pi/2 < \arg \mu_k \leq 3\pi/2. \quad (3.22)$$

Остается только заметить, что в силу формулы (2.6)

$$\begin{aligned} i^n J^{-1/2}(y, \pi/2, v(x, \pi/2, y)) &= \\ &= \sqrt{\det \operatorname{Hess}_v(-\Phi_1(y, v(x, \pi/2, y)))}, \end{aligned}$$

где

$$\operatorname{Arg} \det \operatorname{Hess}_v(-\Phi(y, v(x, \pi/2, y))) = \sum \arg \lambda_k(y, x).$$

Здесь числа

$$\lambda_1(y, v(x, \pi/2, y)), \dots, \lambda_n(y, v(x, \pi/2, y))$$

являются собственными числами матрицы

$$\operatorname{Hess}_v(-\Phi(y, v(x, \pi/2, y)))$$

и связаны с собственными числами матрицы

$$\operatorname{Hess}_v(\Phi(y, v(x, \pi/2, y)))$$

соотношениями

$$\lambda_k(y, v(x, \pi/2, y)) = -\mu_k(y, v(x, \pi/2, y)), \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.23)$$

При этом из (3.22) и (3.23) следует, что

$$-3\pi/2 < \arg \lambda_k(y, v(x, \pi/2, y)) \leq \pi/2.$$

Теорема 3.1 доказана полностью.

### § 5.4. Применение к неаналитическому случаю и лагранжевым многообразиям

Рассмотрим интеграл

$$I(x, y, h) = \left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{n/2} \int \exp\left\{\frac{i}{h}[\Phi(y, v) - \langle x, v \rangle]\right\} \chi(v) \varphi(y, v) dv, \quad (4.1)$$

где функции  $\Phi(y, v)$  и  $\varphi(y, v)$  не предполагаются аналитическими. Пусть  $w(x, y)$  — стационарная точка фазы  $\Phi(y, v) - \langle x, v \rangle$ :

$$\frac{\partial}{\partial v} \Phi(y, w(x, y)) = x.$$

Рассмотрим функции

$$\Phi_1(x, v, y) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left[ (v - w(x, y)) \frac{\partial}{\partial w} \right]^k \Phi(y, w) \Big|_{w=w(x, y)},$$

$$\varphi_1(x, v, y) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left[ (v - w(x, y)) \frac{\partial}{\partial w} \right]^k \varphi(y, w) \Big|_{w=w(x, y)}.$$

Функции  $\Phi_1(x, y, v)$  и  $\varphi_1(x, y, v)$  являются, очевидно, аналитическими функциями параметра  $v$ , причем для любого мультииндекса  $\alpha$ ,  $|\alpha| \leq N$ ,

$$D_v^\alpha \Phi_1(x, y, v) \big|_{v=w(x, y)} = D_w^\alpha \Phi(y, w) \big|_{w=w(x, y)}, \quad (4.2)$$

$$D_v^\alpha \varphi_1(x, y, v) \big|_{v=w(x, y)} = D_w^\alpha \varphi(y, w) \big|_{w=w(x, y)}. \quad (4.3)$$

Введем теперь в рассмотрение интеграл

$$\begin{aligned} I_1(x, y, h) &= \\ &= \left( \frac{i}{2\pi h} \right)^{n/2} \int_{R_n} \exp \left\{ \frac{i}{h} [\Phi_1(x, y, v) - \langle x, v \rangle] \right\} \chi(v) \varphi_1(x, y, v) dv. \end{aligned}$$

Докажем, что точка  $w = w(x, y)$  является стационарной точкой фазы

$$\Phi_1(x, y, v) - \langle x, v \rangle.$$

Действительно,

$$\frac{\partial \Phi_1(x, y, v)}{\partial v} \bigg|_{v=w(x, y)} = \frac{\partial \Phi(y, w)}{\partial w} \bigg|_{w=w(x, y)} = x.$$

Имеем

$$\begin{aligned} I(x, y, h) &\equiv \exp \left\{ \frac{i}{h} [\Phi(y, w(x, y)) - \langle x, w(x, y) \rangle] \right\} \times \\ &\quad \times \sum_{k=0}^N h^k W_k[\Phi, \varphi] \pmod{h^{N+1}}, \\ I_1(x, y, h) &\equiv \exp \left\{ \frac{i}{h} [\Phi_1(x, y, w(x, y)) - \langle x, w(x, y) \rangle] \right\} \times \\ &\quad \times \sum_{k=0}^N h^k W_k[\Phi_1, \varphi_1] \pmod{h^N}. \end{aligned}$$

Поскольку  $\Phi_1(x, y, w(x, y)) = \Phi(y, w(x, y))$ , а выражения  $W_k$  зависят только от производных функций  $\Phi_1, \varphi_1$  по переменным  $v$  в стационарной точке, то, учитывая (4.2), (4.3), получаем, что разложения интегралов  $I(x, y, h)$  и  $I_1(x, y, h)$  совпадают. Используя теорему 3.1, получим, что коэффициенты  $W_k[\Phi, \varphi]$  удовлетворяют соотношениям (3.2), (3.3), (3.4), (3.6).

Переформулируем полученные результаты на языке теории операторов. Зафиксируем фазу интеграла (4.1) и будем рассматривать этот интеграл как оператор, сопоставляющий каждой финитной функции  $\varphi(y, v)$  с компактным носителем \*) некоторую функцию

$$I(x, y, h) = I[\varphi](x, y, h). \quad (4.4)$$

С точностью до  $h^{N+1}$  оператор (4.4) представляет собой оператор

$$\begin{aligned} I[\varphi] &= (x, y, h) \equiv \\ &\equiv \frac{\exp\left\{\frac{i}{h} \Phi(x, \zeta(x))\right\}}{\sqrt{\det \text{Hess}(-\Phi(x, \zeta(x)))}} V[\varphi(y, v)](y, \zeta(x)) \pmod{h^{N+1}}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $V$  — полином по  $h$  степени  $N$  вида

$$V = 1 + D_1 h + \dots + D_N h^N. \quad (4.6)$$

Коэффициентами полинома  $V$  служат дифференциальные операторы

$$D_k = \sum_{|\alpha| \leq 2k} a_\alpha(y, v) D^\alpha \quad (4.7)$$

порядка, не превосходящего  $2k$ , с аналитическими коэффициентами. В формуле (4.7)

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{(\partial v^1)^{\alpha_1} \dots (\partial v^n)^{\alpha_n}}.$$

Оператор (4.4) по линейности распространяется на элементы вида

$$\varphi_0 + h\varphi_1 + \dots + h^k \varphi_k,$$

следовательно, на такие элементы может быть и распространен оператор (4.6).

Рассмотрим теперь лагранжево многообразие  $L$  в фазовом пространстве  $\Phi_{\mathbb{R}}$  и две канонические карты  $U_I$  и  $U_J$  с непустым пересечением  $U_I \cap U_J \neq \emptyset$ . Как и ранее, введем обозначения:  $I_1 = I \cap J$ ,  $I_2 = I \setminus I_1$ ,  $I_3 = J \setminus I_1$ ,  $I_4 = [n] \setminus$

\*) Если рассматривать функции с компактным носителем, то множитель  $\chi(v)$  в (4.1) можно опустить.



$\setminus (I \cup J)$ . Пусть  $S_I(x^I, p_I)$  — функция действия в канонической карте  $U_I$ , т. е. такая функция, что

$$dS_I(x^I, p_I) = p_I dx^I - x^I dp_I.$$

Тогда на пересечении канонических карт  $U_I \cap U_J$  рассмотрим функцию

$$\Phi = p_{I_3} x^{I_2} - x^{I_2} p_{I_3} + S_I(x^{I_1}, x^{I_2}, p_{I_3}, p_{I_4}). \quad (4.8)$$

Полагая  $v = (x^{I_2}, p_{I_3})$ ,  $x = (x^{I_3}, p_{I_2})$ ,  $y = (x^{I_1}, p_{I_4})$ , представим функцию (4.8) как фазу интеграла вида (4.1):

$$\Phi = \Phi(x, y, v).$$

Можно проверить, что если функция  $\Phi = \Phi(p_{I_3}, x^{I_2}, x^{I_1}, p_{I_4})$  имеет носитель, сосредоточенный в пересечении карт  $U_I \cap U_J$ , то интеграл

$$\begin{aligned} (-1)^{|I_2|/2} \left( \frac{i}{2\pi\hbar} \right)^{|I_2|+|I_3|} \iint \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\langle p_{I_3}, x^{I_2} \rangle - \langle x^{I_2}, p_{I_3} \rangle) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_I(x^I, p_I) \right\} \Phi(x^I, p_I) dp_{I_3} dx^{I_2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 1.1. Соответствующий оператор  $V$ , определенный по формуле (4.5), мы обозначим через  $V_{IJ}$ , чтобы подчеркнуть его зависимость от карт  $U_I$  и  $U_J$ , на пересечении которых он задан. Оператор  $V_{IJ}$  в соответствии с формулой (4.9) будет определяться следующим образом:

$$\begin{aligned} (-1)^{|I_2|/2} \left( \frac{i}{2\pi\hbar} \right)^{|I_2|+|I_3|} \iint \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\langle p_{I_3}, x^{I_2} \rangle - \langle x^{I_2}, p_{I_3} \rangle) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_I(x^I, p_I) \right\} \Phi(x^I, p_I) dp_{I_3} dx^{I_2} \equiv \\ \equiv \frac{\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_I(x_0^I, p_I^0) \right\}}{\sqrt{\det \text{Hess}_{p_{I_3}, x^{I_2}} (-S_I(x_0^I, p_I^0))}} V_{IJ}[\Phi] \pmod{\hbar^{N+1}}, \end{aligned}$$

где  $(x_0^I, p_I^0)$  — стационарная точка фазы  $\Phi$ .

## Г Л А В А VI

### КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР МАСЛОВА (ОБЩАЯ ТЕОРИЯ)

Цель этой главы — построить канонический оператор Маслова, позволяющий находить асимптотические решения уравнений с любой степенью точности относительно параметра  $\hbar$ . Результаты этой главы естественно являются уточнением результатов главы IV, где был построен канонический оператор Маслова, решающий задачу с точностью до первой степени параметра  $\hbar$ .

Техническим средством построения общей теории является, как уже говорилось в предисловии к главе V, формула асимптотического разложения интеграла быстро осциллирующей функции, содержащая весь ряд членов по  $\hbar$ . Как и в главе IV, построение теории проводится на языке гомологических препятствий, и мы показываем, что на квантованном лагранжевом многообразии существует канонический оператор, согласованный на пересечениях карт с любой степенью точности. При этом выясняется, что никаких дополнительных препятствий, кроме уже изученных в главе IV для определения канонического оператора, нет, так что единственным условием существования такого оператора является квантованность лагранжева многообразия.

Два слова о методе построения теории. Существуют два альтернативных подхода к этой задаче. Первый состоит в построении в каждой канонической карте локальных канонических операторов, согласованных с нужной степенью точности на пересечении таких карт. Эти локальные операторы представляют собой асимптотические ряды по переменной  $\hbar$ , первые члены которых совпадают с элементарными операторами, введенными в главе IV. Полученный таким образом оператор (см. § 2 настоящей

главы) будет определен на пространстве гладких финитных функций на лагранжевом многообразии. Можно, однако, попытаться обойтись элементарными каноническими операторами, введя нужную коррекцию в закон преобразования функций при переходе из одной канонической карты в другую. Этот способ приводит, как показано в § 3 настоящей главы, к глобальному каноническому оператору, определенному на пространстве некоторого алгебраического пучка, изоморфного, впрочем, обычно му функциональному пространству.

### § 6.1. Существование и единственность канонического оператора

Рассмотрим квантованное лагранжево многообразие  $L$  в фазовом пространстве  $\Phi_R$ , введенное в первой части. Напомним, что для задания такого многообразия нужно фиксировать следующий набор объектов:

а)  $\Phi_R$  — гамильтоново фазовое пространство с координатами

$$(x, p) = (x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$$

со структурной формой  $\omega = dx^k \wedge dp_k$ ;

б)  $i: L \subset \Phi_R$  — лагранжево вложение многообразия  $L$ ,

$$i^* \omega = 0;$$

в) невырожденную меру  $\mu \in \Lambda^n(L)$ ;

г) набор  $\{S_I\}$  гладких функций, являющихся в каждой карте некоторого атласа канонических карт  $\{U_I\}$  многообразия  $L$  решением уравнения \*)

$$dS_I = i^* \{p_I dx^I - x^I dp_I\},$$

а на пересечении двух карт  $U_I \cap U_J$  удовлетворяющих равенству

$$S_J - S_I = i^* \{x^{I_1} p_{I_2} - x^{I_2} p_{I_1}\};$$

---

\*) Через  $I, J$  мы обозначаем, как и раньше, подмножество в множестве целых чисел  $\{1, \dots, n\}$ ;  $\bar{I}, \bar{J}$  — дополнение к множествам  $I, J$ ;  $I_1 = I \cap J$ ,  $I_2 = I \setminus J$ ,  $I_3 = J \setminus I$ ,  $I_4 = \bar{I} \setminus \bar{J}$ .

д) набор  $\{\mu_I\}$  гладких функций, определенных в каждой канонической карте  $U_I$  формулой

$$\mu_I = \frac{\partial \mu}{\partial (x^I, p_I)},$$

причем аргументы функций  $\mu_I$  выбраны таким образом, чтобы в пересечении  $U_I \cap U_J$  для любых двух канонических карт  $U_I$  и  $U_J$  выполнялось условие

$$\arg \mu_I - \arg \mu_J = \sum \arg \lambda_{k, IJ} + |I_2| \pi,$$

где  $\lambda_{k, IJ}$  — собственные значения матрицы

$$\frac{\partial (-p_{I_2}, x^{I_2})}{\partial (x^{I_2}, p_{I_2})}, \quad -3\pi/2 < \arg \lambda_{k, IJ} \leq \pi/2.$$

Рассмотрим линейное пространство многочленов от переменной  $h$  с коэффициентами из кольца  $C^\infty(L)$ , т. е. многочленов вида

$$f = f_0 + hf_1 + \dots + h^k f_k. \quad (1.1)$$

Пространство многочленов вида (1.1), очевидно, образует кольцо, обозначаемое через  $C^\infty(L)[h]$ . Рассмотрим в кольце  $C^\infty(L)[h]$  идеал, состоящий из многочленов вида

$\sum_{k \geq N+1} h^k g_k$ , и обозначим через  $C^\infty(L)[h]_N$  фактор-кольцо

кольца многочленов по указанному идеалу. Подкольцо кольца  $C^\infty(L)[h]_N$ , порожденное многочленами с финитными коэффициентами, обозначим через  $C_0^\infty(L)[h]_N$ . Аналогично, если  $U \subset L$  — открытое множество, то через  $C^\infty(U)[h]_N$ ,  $C_0^\infty(U)[h]_N$  обозначаются соответствующие кольца, порожденные многочленами вида (1.1), коэффициенты которых принадлежат пространствам  $C^\infty(U)$ ,  $C_0^\infty(U)$  соответственно.

Рассмотрим две произвольные карты  $U_I$  и  $U_J$  многообразия  $L$ . В главе V, § 4, были определены дифференциальные операторы

$$V_{IJ} : C_0^\infty(U_I \cap U_J)[h]_N \rightarrow C_0^\infty(U_I \cap U_J)[h]_N,$$

$$V_{IJ} = \sum_{k=0}^N h^k \sum a_{\alpha} D_{x^J, p_J}^{\alpha},$$

коэффициенты  $a_\alpha$  которых являются функционалами от функций  $S_J$ ,  $\mu_J$  и их производных порядков  $|\beta| \leq |\alpha|$ :

$$a_\alpha = a_\alpha(S_J^{(\beta)}, \mu_J^{(\beta)}).$$

Операторы  $V_{IJ}$  обладают следующими свойствами:

а) если  $\varphi \in C_0^\infty(U_I)[h]_N$ , то  $V_{II}\varphi = \varphi$ ;

б) если  $\varphi \in C_0^\infty(U_I \cap U_J \cap U_K)[h]_N$ , то  $V_{KJ} \circ V_{JI} \varphi = V_{KI}\varphi$ .

Пусть  $\{U_I\}$  — некоторый канонический атлас многообразия  $L$ . Существует разбиение единицы  $\{\varphi_I\}$ , подчиненное покрытию  $\{U_I\}$ , т. е.

$$\sum \varphi_I \equiv 1, \quad \text{supp } \varphi_I \subset U_I. \quad (1.2)$$

Фиксируем такое разбиение единицы. Ясно, что если  $\mu_K = 0$  в точке  $\alpha \in L$ , то  $\varphi_K(\alpha) = 0$ . Определим теперь локальный канонический оператор, отвечающий канонической карте  $U_I$ , полагая для произвольного элемента  $\varphi \in C_0^\infty(U_I)[h]_N$

$$K_I \varphi = F_{p_I \rightarrow x_I}^{1/h} \left\{ \exp \left( \frac{i}{h} S_I \right) \sqrt{\mu_I} \sum_K V_{IK} \varphi_K \right\}. \quad (1.3)$$

**Теорема 1.1.** *Для лагранжева квантованного многообразия существует единственный оператор*

$$K: C_0^\infty(L)[h]_N \rightarrow {}^{N+1}H^{1/h}(\mathbb{R}^n),$$

*совпадающий в каждой канонической карте атласа  $\{U_I\}$  с оператором (1.3), т. е. если  $\varphi \in C_0^\infty(U_I)[h]_N$ , то*

$$K_I \varphi \equiv K \varphi \pmod{h^{N+1}}. \quad (1.4)$$

Доказательство теоремы 1.1 вытекает из следующей леммы.

**Лемма 1.2.** *Пусть  $U_I$ ,  $U_J$  — две канонические карты атласа  $\{U_I\}$ ,  $\varphi \in C_0^\infty(U_I \cap U_J)[h]_N$ . Тогда*

$$K_I \varphi \equiv K_J \varphi \pmod{h^{N+1}}.$$

**Доказательство.** Обозначим через  $k_I$  оператор, действующий на произвольный элемент  $\varphi \in C_0^\infty(U_I)[h]_N$

по формуле

$$k_I \varphi = F^{1/h}_{p_I \rightarrow x_I} \left\{ \exp \left( \frac{i}{h} S_I \right) V_{\mu_I} \varphi \right\}. \quad (1.5)$$

Тогда

$$K_I \varphi = k_I \left( \sum_K V_{IK} (\varphi_K \varphi) \right).$$

Сравним теперь  $K_I \varphi$  и  $K_J \varphi$ . Используя формулу асимптотического разложения интеграла (1.3) главы V, получим

$$K_I \varphi \equiv k_I V_{IJ} \varphi \pmod{h^{N+1}}.$$

Свойства а) и б) операторов  $V_{IJ}$  позволяют заключить, что

$$K_I \varphi \equiv k_J \sum_K V_{JK} (\varphi_K \varphi) \pmod{h^{N+1}} = K_J \varphi.$$

## § 6.2. Гамильтонов формализм и операторы $\mathcal{P}_I$

Рассмотрим некоторую каноническую карту  $U_I$  многообразия  $L$  и гамильтониан  $H = H(x^I, \bar{x}^I, p_I, p_{\bar{I}})$  на карте  $U_I$ . В этом параграфе мы определим некоторые линейные дифференциальные операторы

$$\mathcal{P}_I: C^\infty(U_I)[h]_N \rightarrow C^\infty(U_I)[h]_N,$$

играющие в дальнейшем изложении основную роль. Операторы  $\mathcal{P}_I$  будут коммутировать с оператором умножения на независимую переменную  $h$ , и поэтому будем искать их в виде многочлена по переменной  $h$ :

$$\mathcal{P}_I = \mathcal{P}_I^0 + h \mathcal{P}_I^1 + \dots + h^N \mathcal{P}_I^N.$$

Компоненты  $\mathcal{P}_I^k: C^\infty(U_I) \rightarrow C^\infty(U_I)$  определим с помощью рекуррентного процесса. Более того, для операторов  $\mathcal{P}_I^0, \mathcal{P}_I^1$  будут получены явные формулы. Переходим к процедуре определения операторов  $\mathcal{P}_I^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Применим оператор Гамильтона

$$\hat{H}_I = H(\hat{p}_I, p_{\bar{I}}, \hat{x}^I, \bar{x}^I),$$

где  $\hat{p}_I = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^I}$ ,  $\hat{x}^{\bar{I}} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_{\bar{I}}}$ , к функции  $\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(x^I, p_{\bar{I}}) \right\} \times \psi(x^I, p_{\bar{I}})$ . Тогда после ряда преобразований (см. гл. IV, § 2) мы приходим к интегралу (2.23) главы IV:

$$I(h) = \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right)^n \iiint \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [\langle x^{\bar{I}}, (p'_{\bar{I}} - p_{\bar{I}}) \rangle + \langle p_I, (x^I - x'^I) \rangle + S(x'^I, p'_{\bar{I}})] \right\} H_1(x^I, x^{\bar{I}}, p_I, p'_{\bar{I}}) \times \\ \times \psi(x'^I, p'_{\bar{I}}) dx^{\bar{I}} dp_I dx'^I dp'_{\bar{I}}. \quad (2.1)$$

Асимптотическое разложение интеграла (2.1) имеет вид ( $x^I$  — свободный параметр)

$$I(h) \equiv \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(x'^I, p'_{\bar{I}}) \right\} \sum_{k=1}^N \sum_{|\alpha^{\bar{I}}| + |\beta_I| + |\beta_{\bar{I}}| \leq 2k} D_{x^{\bar{I}}, p_I, p_{\bar{I}}}^{\alpha^{\bar{I}}, \beta_I, \beta_{\bar{I}}} \times \\ \times H_1(x^I, x^{\bar{I}}, p_I, p_{\bar{I}}) C_{\alpha^{\bar{I}}, \beta_I, \beta_{\bar{I}}}^k(\psi, S). \quad (2.2)$$

В формуле (2.2) введены следующие обозначения:

$$x^{\bar{I}} = - \frac{\partial S}{\partial p_{\bar{I}}}(x^I, p_{\bar{I}}), \quad p_I = \frac{\partial S}{\partial x^I}(x^I, p_{\bar{I}}), \quad (2.3)$$

$$x'^I = x^I, \quad p'_{\bar{I}} = p_{\bar{I}}.$$

Функция  $H_1(x^I, x^{\bar{I}}, p_I, p_{\bar{I}})$  определена формулой (2.23) главы IV, символы

$$D_{x^{\bar{I}}, p_I, p_{\bar{I}}}^{\alpha^{\bar{I}}, \beta_I, \beta_{\bar{I}}} = \frac{\partial^{\alpha^{\bar{I}}}}{(\partial x^{\bar{I}})^{\alpha^{\bar{I}}}} \frac{\partial^{\beta_I}}{(\partial p_I)^{\beta_I}} \frac{\partial^{\beta_{\bar{I}}}}{(\partial p_{\bar{I}})^{\beta_{\bar{I}}}}$$

обозначают дифференциальные операторы,  $\alpha^{\bar{I}}$ ,  $\beta_I$ ,  $\beta_{\bar{I}}$  — мультииндексы. Наконец, выражения

$$C_{\alpha^{\bar{I}}, \beta_I, \beta_{\bar{I}}}^k(\psi, S) \quad (2.4)$$

обозначают многочлены от функций  $\psi$ ,  $S$  и их производных до порядка  $2k$  включительно. Значение правой части разложения (2.2) берется в точке (2.3).

Дадим алгоритм нахождения коэффициентов (2.4). Мы будем определять их рекуррентно. Пусть  $k_0$  и  $r$  — некоторые натуральные числа,  $r \leq 2k_0$ . Предположим, что в выражении уже вычислены все коэффициенты для  $k < k_0$  и для  $k = k_0$ ,  $|\alpha| + |\beta| < r$  (для краткости мы обозначили  $\alpha = \alpha^{\bar{I}}$ ,  $\beta = (\beta_I, \beta_{\bar{I}})$ ). Вычислим коэффициенты (2.4) для

$$k = k_0, \quad |\alpha| + |\beta| = r. \quad (2.5)$$

Для этого вычислим для произвольного набора  $(\alpha_0, \beta^0) = (\alpha_I^0, \beta_{\bar{I}}^0)$ , удовлетворяющего условию (2.5), выражение

$$\hat{H}_I \psi_I = H(\hat{p}_I, p_{\bar{I}}, x^I, \hat{x}^{\bar{I}}) \exp \left\{ \frac{i}{h} S(x^I, p_{\bar{I}}) \right\} \psi(x^I, p_{\bar{I}}) \quad (2.6)$$

с гамильтонианом

$$H(x^I, x^{\bar{I}}, p_I, p_{\bar{I}}) = \frac{1}{\alpha_0! \beta_I^0! \beta_{\bar{I}}^0!} (x^{\bar{I}})^{\alpha_{\bar{I}}^0} (p_I)^{\beta_I^0} (p_{\bar{I}})^{\beta_{\bar{I}}^0}. \quad (2.7)$$

Заметим, что единственная, отличная от нуля производная порядка  $r$  выражения (2.7) есть

$$D_x^{\alpha_0} D_p^{\beta_0} \frac{x^{\alpha_0} p^{\beta_0}}{\alpha_0! \beta_0!} = 1.$$

Поэтому

$$C_{\alpha_0 \beta_0}^k = \left[ \hat{H}_I \exp \left\{ \frac{i}{h} S(x^I, p_{\bar{I}}) \right\} \psi(x^I, p_{\bar{I}}) \right]_{k_0} - \\ - \sum_{|\alpha| + |\beta| < r} C_{\alpha \beta}^{k_0} [\psi, S] D_x^{\alpha} D_p^{\beta} \frac{x^{\alpha_0} p^{\beta_0}}{\alpha_0! \beta_0!}.$$

Через  $[\ ]_{k_0}$  мы обозначили коэффициент при  $h^{k_0}$  в разложении по степеням  $h$  выражения (2.6).

Определим теперь операторы  $P_I^k$ , полагая для  $\psi \in C^\infty(U_I)$

$$P_I^k [\psi] = \\ = \sum_{|\alpha^{\bar{I}}| + |\beta_I| + |\beta_{\bar{I}}| \leq 2k} D_{x^I, p_I, p_{\bar{I}}}^{\alpha^{\bar{I}}, \beta_I, \beta_{\bar{I}}} H(x^I, x^{\bar{I}}, p_I, p_{\bar{I}}) C_{\alpha^{\bar{I}}, \beta_I, \beta_{\bar{I}}}^k(S) [\psi], \quad (2.8)$$



где  $C_{\alpha\bar{I}, \beta I, \beta\bar{I}}^k(S) [\psi] = C_{\alpha\beta}^k(\psi, S)$  определяются описанным выше алгоритмом.

Отметим некоторые свойства операторов  $P_I^k$ .

1. Сператоры  $P_I^k$  суть линейные дифференциальные операторы порядка не выше  $k$ .

2. Коэффициенты оператора  $P_I^k$  суть [полиномы от функции  $S_I(x^I, p_{\bar{I}})$  и ее производных порядка не выше  $2k$ .

3. Для любой функции  $\psi_I \in C_0^\infty(U_I)$  имеет место сравнение

$$\hat{H}_I \exp \left\{ \frac{i}{h} S(x^I, p_{\bar{I}}) \right\} \psi_I(x^I, p_{\bar{I}}) \equiv \sum_{k=0}^N h^k P_I^k \psi_I(x^I, p_{\bar{I}}) \pmod{h^{N+1}}. \quad (2.9)$$

Вычислим операторы  $P_I^k$  для  $k=0, 1$ . Оператор  $P_I^0$  вычисляется тривиально и, очевидно, равен

$$P_I^0 \psi_I(x^I, p_{\bar{I}}) = H \left( x^I, -\frac{\partial S(x^I, p_{\bar{I}})}{\partial p_{\bar{I}}}, \frac{\partial S(x^I, p_{\bar{I}})}{\partial x^I}, p_{\bar{I}} \right) \psi_I(x^I, p_{\bar{I}})$$

для любой функции  $\psi_I \in C^\infty(U_I)$ .

Для вычисления оператора  $P_I^1$  заметим, что коэффициент при  $h^1 = h$  в выражении (2.9) зависит от производных функции  $H$  порядка не выше второго и поэтому может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} a_0 + a^{\bar{I}} \frac{\partial H}{\partial x^{\bar{I}}} + a_I \frac{\partial H}{\partial p_I} + a_{\bar{I}} \frac{\partial H}{\partial p_{\bar{I}}} + b_{II} \frac{\partial^2 H}{\partial p_I \partial p_I} + b^{\bar{I}\bar{I}} \frac{\partial^2 H}{\partial x^{\bar{I}} \partial x^{\bar{I}}} + \\ + b_{\bar{I}I} \frac{\partial^2 H}{\partial p_{\bar{I}} \partial p_I} + b^{\bar{I}I} \frac{\partial^2 H}{\partial x^{\bar{I}} \partial p_I} + b_{I\bar{I}} \frac{\partial^2 H}{\partial p_I \partial p_{\bar{I}}} + b^{\bar{I}I} \frac{\partial^2 H}{\partial x^{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}}. \end{aligned}$$

У всех входящих в это выражение функций аргументы берутся в точке  $(x^I, x^{\bar{I}}, p_I, p_{\bar{I}})$ ,

$$x^{\bar{I}} = -\frac{\partial S}{\partial p_{\bar{I}}}(x^I, p_{\bar{I}}), \quad p_I = \frac{\partial S}{\partial x^I}(x^I, p_{\bar{I}}).$$

Нахождение неопределенных коэффициентов  $a_0, a_1, a_2, \dots$  и т. д. осуществляется, в согласии с изложенным выше, путем подбора специальных гамильтонианов.

В следующей ниже таблице 1 приведены список гамильтонианов и определенные с их помощью коэффициенты. Вычисления, ввиду тривиальности, опущены.

Заметим теперь, что для любой функции

$$\psi(x^I, p_I) \in C_0^\infty(U_I)$$

имеет место следующая формула коммутации:

$$\hat{H}(x, \hat{p}) F_{p_I \rightarrow x^I} \bar{\psi}(x^I, p_I) = F_{p_I \rightarrow x^I} \bar{H}_I(x^I, \hat{x}^I, \hat{p}_I, p_I) \psi(x^I, p_I).$$

Резюмируя вышеизложенное, мы можем высказать следующее

**Предложение 2.1.** Пусть  $S(x^I, p_I)$  — действие в карте  $U_I$  и  $H = H(x, p)$  — гамильтониан. Тогда для любой функции  $\psi \in C_0^\infty(U_I)$  имеет место следующее сравнение:

$$\begin{aligned} \hat{H} F_{p_I \rightarrow x^I} \exp\left\{\frac{i}{h} S(x^I, p_I)\right\} \psi(x^I, p_I) &\equiv \\ &\equiv F_{p_I \rightarrow x^I} \exp\left\{\frac{i}{h} S(x^I, p_I)\right\} \left\{ H + i\hbar \left[ \frac{\partial H}{\partial x^I} \frac{\partial}{\partial p_I} - \frac{\partial H}{\partial p_I} \frac{\partial}{\partial x^I} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^I \partial x^I} \frac{\partial^2 H}{\partial p_I \partial p_I} + \frac{\partial^2 S}{\partial p_I \partial p_I} \frac{\partial^2 H}{\partial x^I \partial x^I} - 2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^I \partial p_I} \frac{\partial^2 H}{\partial x^I \partial p_I} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial^2 H}{\partial x^I \partial p_I} \right] + \sum_{k=2}^N \hbar^k P_I^k \right\} \psi \pmod{\hbar^{N+1}}. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Здесь значения функций  $H$  и ее производных берутся в точке

$$\left( x^I, -\frac{\partial S(x^I, p_I)}{\partial p_I}, \frac{\partial S}{\partial x^I}(x^I, p_I), p_I \right)$$

и через  $\frac{\partial^2 S}{\partial x^I \partial x^I}, \dots$  обозначены вторые частные производные

ТАБЛИЦА 1

Гамильтониан	Коэффициент	Гамильтониан	Коэффициент
1	$a_0 = 0$	$p_I p_I$	$b_{II} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^I \partial x^I}$
$p_{\bar{I}}$	$a_{\bar{I}} = 0$	$x^{\bar{I}} x^{\bar{I}}$	$b_{\bar{I}\bar{I}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial p_{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}}$
$x^{\bar{I}}$	$a^{\bar{I}} = \frac{\partial}{\partial p_{\bar{I}}}$	$x^{\bar{I}} p_I$	$b^{\bar{I}}_I = \frac{\partial^2 S}{\partial x^I \partial p_{\bar{I}}}$
$p_I$	$a_I = \frac{\partial}{\partial x^I}$	$x^{\bar{I}} p_{\bar{I}}$	$b^{\bar{I}}_{\bar{I}} = \delta^{\bar{I}}_{\bar{I}}$
$p_{\bar{I}} p_{\bar{I}}$	$b_{\bar{I}\bar{I}} = 0$		
$p_I p_{\bar{I}}$	$b_{I\bar{I}} = 0$		

функции  $S(x^I, p_{\bar{I}})$  по параметрам  $x^I, p_{\bar{I}}$ , а операторы  $P_I^k$  определены формулой (2.8).

Определим теперь полный оператор, полагая

$$P_I[h] = \sum_{k=0}^N h^k P_I^k.$$

Операторы  $P_I^k$  являются дифференциальными операторами порядка не выше  $k$  (см. (2.9)), коэффициенты которых — гладкие функции. Таким образом, оператор  $P_I[h]$  корректно определен как оператор из кольца  $C^\infty(U_I)[h]_N$  в себя:

$$P_I[h] : C^\infty(U_I)[h]_N \rightarrow C^\infty(U_I)[h]_N.$$

В § 6.1 мы для каждой канонической карты  $U_I$  определили некоторый оператор

$$V_I[h] = \sum_{U_I \cap U_K \neq \emptyset} V_{IK} \Phi_K : C^\infty(U_I)[h]_N \rightarrow C^\infty(U_I)[h]_N. \quad (2.11)$$

Заметим, что оператор (2.11) обратим, поскольку оператор  $V_I[h]$  разлагается в ряд по степеням  $h$ , причем коэффициент при  $h^0$  равен тождественному оператору.

Обозначим через  $\mu_I^{1/2}[h]_\perp$  оператор

$$\mu_I^{1/2}[h] = \mu_I^{1/2} V_I[h]. \quad (2.12)$$

Оператор (2.12) обратим, поскольку он является произведением обратимых сомножителей, а его обратный  $\mu_I^{-1/2}[h] = V_I^{-1}[h] \mu_I^{-1/2}$  осуществляет отображение

$$\mu_I^{-1/2}[h] : C^\infty(U_I)[h]_N \rightarrow C^\infty(U_I)[h]_N.$$

С помощью оператора  $P_I[h]$  и операторов  $\mu_I^{-1/2}[h]$ ,  $\mu_I^{1/2}[h]$  мы определим в карте  $U_I$  оператор  $\mathcal{P}_I$ , играющий в теореме коммутации основную роль, полагая

$$\mathcal{P}_I[h] = \mu_I^{-1/2}[h] P_I[h] \mu_I^{1/2}[h].$$

Оператор  $\mathcal{P}_I[h]$  действует из пространства  $C^\infty(U_I)[h]_N$  в себя:

$$\mathcal{P}_I[h] = \mathcal{P}_I : C^\infty(U_I)[h]_N \rightarrow C^\infty(U_I)[h]_N.$$

### § 6.3. Коммутация оператора Гамильтона и канонического оператора

В предыдущем параграфе мы определили операторы  $\mathcal{P}_I$ , действующие в  $C^\infty(U_I)[h]_N$  и связанные с оператором Гамильтона формулой (2.10). Нашей дальнейшей целью является построение такого дифференциального оператора  $\mathcal{P}$  на лагранжевом многообразии  $L$ , чтобы выполнялось соотношение

$$\hat{H}K\varphi \equiv -ihK\mathcal{P}\varphi \pmod{h^{N+1}}.$$

**Предложение 3.1.** *Существует такой дифференциальный оператор*

$$\mathcal{P} : C^\infty(L)[h]_N \rightarrow C^\infty(L)[h]_N,$$

*что если  $\varphi \in C^\infty(U_I)[h]_N$ , то  $\mathcal{P}\varphi \equiv \mathcal{P}_I\varphi \pmod{h^{N+1}}$ .*

**Доказательство.** Покажем, что для любых двух канонических карт  $U_I$  и  $U_J$  с непустым пересечением  $U_I \cap U_J \neq \emptyset$  и любого элемента  $\varphi \in C_0^\infty(U_I \cap U_J)[h]_N$  имеет место сравнение

$$\mathcal{P}_I\varphi \equiv \mathcal{P}_J\varphi \pmod{h^{N+1}}.$$

Пусть  $K_I$  — локальный канонический оператор в карте  $U_I$  (см. § 6.1). Тогда для любого элемента

$$\varphi \in C_0^\infty(U_I \cap U_J)[h]_N$$

имеем

$$\begin{aligned} \hat{H}(x, \hat{p}) K_I \varphi &= \\ &= \hat{H}(x, \hat{p}) F_{p_I \rightarrow x_I} \left\{ \exp \left( \frac{i}{h} S_I(x^I, p_I) \right) \sqrt{\mu_I[h](x^I, p_I)} \varphi(x^I, p_I) \right\} = \\ &= F_{p_I \rightarrow x_I} \hat{H}_I(x^I, \hat{x}_I^I, \hat{p}_I, p_I) \exp \left( \frac{i}{h} S_I(x^I, p_I) \right) \times \\ &\quad \times \mu_I^{1/2}[h](x^I, p_I) \varphi(x^I, p_I) \equiv (\text{mod } h^{N+1}) \equiv \\ &\equiv F_{p_I \rightarrow x_I} \exp \left( \frac{i}{h} S_I(x^I, p_I) \right) \mu_I^{1/2}[h](x^I, p_I) \times \\ &\quad \times \mu_I^{-1/2}[h](x^I, p_I) P \mu_I^{1/2}[h](x^I, p_I) \varphi(x^I, p_I) = K_I \mathcal{P}_I \varphi(x^I, p_I). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Аналогично получаем, что для любого элемента

$$\varphi \in C_0^\infty(U_I \cap U_J)[h]_N$$

имеет место сравнение

$$H(x, \hat{p}) K_J \varphi \equiv K_J \mathcal{P}_J \varphi (\text{mod } h^{N+1}). \quad (3.2)$$

По лемме 1.2 для любого элемента

$$\varphi \in C^\infty(U_I \cap U_J)[h]_N$$

имеет место сравнение

$$K_I \varphi \equiv K_J \varphi (\text{mod } h^{N+1}). \quad (3.3)$$

Тогда из сравнений (3.1) и (3.2) получаем

$$K_I (\mathcal{P}_I - \mathcal{P}_J) \varphi \equiv 0 (\text{mod } h^{N+1}). \quad (3.4)$$

Действительно, по определению, сравнение

$$K_I \varphi \equiv K_J \varphi (\text{mod } h^{N+1}).$$

означает, что для любого оператора

$$\hat{p}^\alpha = (-i\hbar)^{|\alpha|} \partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} / (\partial x^1)^{\alpha_1} \dots (\partial x^n)^{\alpha_n}$$

имеет место неравенство

$$|\hat{p}^\alpha (K_I \varphi - K_J \varphi)| \leq ch^{N+1}. \quad (3.5)$$

Заметим теперь, что из определения оператора Гамильтона следует, что для любого оператора  $H(x, \hat{p})^*$  и любой функции  $\psi(x, h)$ , удовлетворяющей неравенству

$$|\psi(x, h)| \leq c_1 h^{N+1},$$

существует такая постоянная  $c_2$ , что

$$|H(x, \hat{p}) \psi(x, h)| \leq c_2 h^{N+1}. \quad (3.6)$$

Поскольку оператор  $\hat{p}^\alpha H(x, \hat{p})$  является некоторым оператором Гамильтона  $\tilde{H}(x, \hat{p})$ , то из неравенств (3.5) и (3.6) следует существование такой постоянной  $c_\alpha$ , что

$$|\hat{p}^\alpha H(x, \hat{p}) \{K_I \varphi - K_J \varphi\}| \leq c_\alpha h^{N+1}. \quad (3.7)$$

Неравенство (3.7) в силу формул (3.2) и (3.3) влечет за собой требуемое сравнение (3.4). Очевидно, что из сравнения (3.4) следует, что

$$\mathcal{P}_I \varphi \equiv \mathcal{P}_J \varphi \pmod{h^{N+1}}. \quad (3.8)$$

Определим теперь оператор  $\mathcal{P}$ . Пусть  $\{\varphi_k\}$  — разбиение единицы, подчиненное покрытию  $\{U_I\}$ . Положим

$$\mathcal{P} \varphi = \sum \mathcal{P}_I (\varphi_I \varphi).$$

Если  $\varphi \in C_0^\infty(U_I)[h]_N$ , то

$$\mathcal{P} \varphi - \mathcal{P}_I \varphi = \sum_k \mathcal{P}_k (\varphi_k \varphi) - P_I \varphi = \sum (\mathcal{P}_k - \mathcal{P}_I) (\varphi_k \varphi). \quad (3.9)$$

Поэтому согласно (3.8) правая часть (3.9)  $\text{mod } h^{N+1}$  сравнима с нулем. Единственность оператора  $\mathcal{P}$  очевидна.

Из определений канонического оператора  $K$ , оператора  $\mathcal{P}$  и формул (3.1) вытекает следующее

**Предложение 3.2.** Пусть  $K$  — канонический оператор на квантованном лагранжевом многообразии  $(L, \mu)$  с мерой  $\mu$ , и пусть  $\mathcal{P}$  — оператор, определенный в предложении 3.1.

Тогда для любого элемента  $\varphi \in C^\infty(L)[h]_N$  имеет место сравнение

$$\hat{H} K \varphi \equiv K \mathcal{P} \varphi \pmod{h^{N+1}}.$$

### § 6.4. Геометрическая интерпретация операторов $V_{I,J}$ и канонического оператора

В предыдущих параграфах этой главы мы определили канонический оператор  $K$  (формула (1.4)), причем определение существенно зависело от некоторого разбиения единицы (1.2), подчиненного каноническому покрытию. Можно дать инвариантное истолкование канонического оператора как оператора, определенного на пространстве сечений некоторого алгебраического пучка.

*Алгебраическим пучком над топологическим пространством  $X$*  называется контравариантный функтор  $F$ , который каждому открытому подмножеству  $W \subset X$  составляет группу  $\Gamma(F, W)$ , называемую *группой сечений* пучка  $F$  над множеством  $W$ , а каждому вложению  $i: W_1 \subset W_2$  одного открытого множества  $W_1$  в другое,  $W_2$ , сопоставляет гомоморфизм групп

$$\Gamma(i): \Gamma(F, W_2) \rightarrow \Gamma(F, W_1),$$

называемый *ограничением сечений пучка  $F$  на подмножество  $W_2$* . Образ сечения  $s$  при гомоморфизме  $\Gamma(i)$  будет обозначаться через  $s|_{W_2}$ . При этом должно выполняться следующее условие: если множество  $W$  представлено в виде объединения

$$W = \bigcup_{\alpha} W_{\alpha},$$

а  $s_{\alpha} \in \Gamma(F, W_{\alpha})$  — такие сечения, что

$$s_{\alpha}|_{W_{\alpha} \cap W_{\beta}} = s_{\beta}|_{W_{\alpha} \cap W_{\beta}} \in \Gamma(F, W_{\alpha} \cap W_{\beta}),$$

то найдется такое единственное сечение  $s \in \Gamma(F, W)$ , что

$$s|_{W_{\alpha}} = s_{\alpha}.$$

Примером алгебраических пучков может служить пучок ростков сечений векторного расслоения  $\xi$  над топологическим пространством  $X$ . В самом деле, если  $\xi$  — векторное расслоение над пространством  $X$ , то определим алгебраический пучок  $\underline{\xi}$  с помощью равенства

$$\Gamma(\underline{\xi}, W) = \Gamma(\xi, W),$$

а для вложения  $i: W_1 \subset W_2$  гомоморфизм  $\Gamma(i)$  обозначает обычное ограничение сечений в расслоении  $\xi$ . Например, если  $\xi$  — одномерное тривиальное расслоение, то  $\Gamma(\underline{\xi}, W)$  совпадает с пространством непрерывных функций на множестве  $W$ .

Если  $X$  — гладкое многообразие, а  $\xi$  — векторное расслоение, то мы можем рассмотреть пучок  $\underline{\xi}^{\infty}$  ростков гладких сечений расслоения  $\xi$ :

$$\Gamma(\underline{\xi}^{\infty}, W) = C^{\infty}(\xi, W).$$

*Отображением  $f$  алгебраического пучка  $F_1$  в алгебраический пучок  $F_2$*  называется система гомоморфизмов

$$\Gamma(f, W): \Gamma(F_1, W) \rightarrow \Gamma(F_2, W),$$

коммутирующая с гомоморфизмами ограничений. Другими словами, для любого вложения  $i: W_1 \rightarrow W_2$  диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(F_1, W_1) & \xrightarrow{\Gamma(f, W_1)} & \Gamma(F_2, W_1) \\ \Gamma(F_1, i) \uparrow & & \uparrow \Gamma(F_2, i) \\ \Gamma(F_1, W_2) & \xrightarrow{\Gamma(f, W_2)} & \Gamma(F_2, W_2) \end{array} .$$

коммутативна.

Например: если  $\xi_1, \xi_2$  — два векторных расслоения над гладким многообразием  $X$ , а  $A$  — дифференциальный оператор, отображающий гладкие сечения расслоения  $\xi_1$  в гладкие сечения расслоения  $\xi_2$ , то оператор  $A$  индуцирует отображение алгебраического пучка  $\xi_1^\infty$  в алгебраический пучок  $\xi_2^\infty$ .

Если  $F$  — алгебраический пучок над пространством  $X$ , а  $W$  — открытое подмножество в  $X$ , то через  $F|W$  мы обозначим ограничение пучка  $F$  на подпространство  $W$ , положив

$$\Pi(F|W, W') = \Gamma(F, W'), \quad W' \subset W.$$

У всякого сечения  $s \in \Gamma(F, X)$  естественным образом определяется носитель сечения.

Алгебраические пучки можно строить методом, сходным с построением векторных расслоений, с помощью функций склейки. Именно, пусть пространство  $X$  представлено в виде объединения его открытых подмножеств. Пусть  $X = \bigcup_{\alpha} W_{\alpha}$ , а над каждым подмножеством  $W_{\alpha}$  задан алгебраический пучок  $F_{\alpha}$ . Пусть, кроме того, заданы изоморфизмы пучков

$$\varphi_{\alpha\beta}: F_{\alpha}|_{W_{\alpha} \cap W_{\beta}} \rightarrow F_{\beta}|_{W_{\alpha} \cap W_{\beta}},$$

причем выполнено равенство

$$\varphi_{\beta\gamma} \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\gamma}$$

для ограничений трех пучков  $F_{\alpha}, F_{\beta}, F_{\gamma}$  на множество  $W_{\alpha} \cap W_{\beta} \cap W_{\gamma}$ . Тогда существуют и единственны алгебраический пучок  $F$  над пространством  $X$  и такие изоморфизмы

$$\psi_{\alpha}: F_{\alpha} \rightarrow F|_{W_{\alpha}},$$

что  $\varphi_{\alpha\beta} = \psi_{\beta}^{-1} \psi_{\alpha}$  над множеством  $W_{\alpha} \cap W_{\beta}$ .

Обозначим через  $\Gamma(F, W)$  группу, элементами которой являются наборы сечений  $\{s_{\alpha}: s_{\alpha} \in \Gamma(F_{\alpha}, W \cap W_{\alpha})\}$ , причем

$$\varphi_{\alpha\beta}(s_{\alpha}|_{W_{\alpha} \cap W_{\beta} \cap W_{\gamma}}) = s_{\beta}|_{W_{\alpha} \cap W_{\beta} \cap W_{\gamma}}.$$

Нетрудно проверить, что набор групп  $\{\Gamma(F, W)\}$  и очевидных гомоморфизмов ограничения удовлетворяет аксиомам алгебраического пучка.

Применим теперь язык алгебраических пучков к определению канонического оператора. С помощью кольца  $C^{\infty}(L)[h]_N$  и операторов



$V_{IJ}$  можно построить алгебраический пучок, который мы обозначим через  $C^\infty(L) [h]_N$ . Именно, покроем лагранжево многообразие  $L$  атласом канонических карт  $\{U_I\}$ . Зададим функцию склейки по формуле

$$V_{IJ}: C^\infty(U_I) [h]_N|_{U_I \cap U_J} \rightarrow C^\infty(U_J) [h]_N|_{U_I \cap U_J}.$$

Пусть  $F$  — алгебраический пучок над многообразием  $L$ , соответствующий указанным функциям склейки. Таким образом, существуют такие изоморфизмы

$$\psi_I: C^\infty(U_I) [h]_N \rightarrow F|_{U_I},$$

что  $V_{IJ} = \psi_J^{-1} \circ \psi_I$ . Оказывается, что формулы (1.5) корректно определяют такой оператор

$$\tilde{K}: \Gamma(F, L) \rightarrow {}^{N+1}H^{1/h}(\mathbb{R}^n),$$

что если  $s \in \Gamma(F, L)$ ,  $\text{supp } s \in U_I$ , то

$$h_I \psi_I^{-1}(s) \equiv K(s) \pmod{h^{N+1}}.$$

Отношение оператора  $\tilde{K}$  к каноническому оператору  $K$  (1.4) определяется следующим утверждением.

**Предложение 4.1.** Каждое разбиение единицы (1.2) индуцирует такой изоморфизм

$$Q: C^\infty(L) [h]_N \rightarrow F,$$

что

- а)  $Q$  является локально дифференциальным оператором;
- б)  $K\phi \neq \tilde{K}Q\phi \pmod{h^{N+1}}$ .

**Доказательство.** Пусть  $\{\varphi_I\}$  — разбиение единицы, подчиненное покрытию  $\{U_I\}$ . Чтобы определить отображение  $Q$ , достаточно определить отображение  $\Gamma(Q, U_I)$  пространств сечений пучков над открытым множеством  $W$ .

Пусть  $\phi \in \Gamma(C^\infty(L) [h]_N, W)$ . Тогда носитель сечения  $\varphi_I \phi$  лежит в  $U_I$ , т. е.

$$\varphi \varphi_I \in \Gamma(C^\infty(L) [h]_N, W \cap U_I).$$

Положим

$$\Gamma(Q, W)(\phi) = \sum_{U_I} \Gamma(\varphi_I, U_I \cap W)(\varphi \varphi_I),$$

понимая каждое слагаемое в правой части как сечение на множестве  $W$ , порожденное вне носителя сечения нулем. Утверждение а) следует из соотношения

$$\Gamma(\varphi_I, U_I \cap U_J) \varphi = \Gamma(\varphi_J, U_I \cap U_J) V_{IJ} \varphi$$

для  $\text{supp } \phi \in U_I \cap U_J$ .

Чтобы доказать, что  $Q$  является изоморфизмом, достаточно проверить изоморфность гомоморфизмов  $\Gamma(Q, U_I)$ .

Имеем

$$\Gamma(Q, U_I)\varphi = \Gamma(\psi_I, U_I) \left\{ \sum_{U_J} V_{IJ} \varphi \varphi_J \right\}.$$

Операторы  $V_{IJ}$ , как многочлены по переменной  $h$ , имеют в качестве коэффициента при нулевой степени переменной  $h$  тождественный оператор, т. е.  $V_{IJ} = 1 + O(h)$ . Поэтому

$$\Gamma(Q, U_I)\varphi = \Gamma(\psi_I, U_I) \{\varphi + hR\varphi\},$$

где  $R$  — некоторый дифференциальный оператор. Поскольку кольцо  $C^\infty(U_I)[h]_N$  является кольцом усеченных многочленов по  $h$ , то оператор, обратный к  $\Gamma(Q, U_I)$ , находится методом неопределенных коэффициентов. Наконец, утверждение б) непосредственно следует из определения.

Предложение 4.1 означает, что неинвариантность канонического оператора  $K$  относительно замены разбиения единицы связана с неоднозначностью выбора изоморфизма  $Q$  между пучками  $C^\infty(L)[h]_N$  и  $F$ . Более того, если мы ограничимся только первыми членами (с  $h^0$ ) сечений этих пучков, то изоморфизм  $Q$  является единственным, т. е. и канонический оператор  $K$  тоже инвариантно определен.

### Добавление I. $1/h$ -преобразование Фурье

Пусть  $h \in (0, 1]$  — координата на отрезке  $(0, 1]$ . Мы введем  $1/h$ -аналоги преобразования Фурье  $F^{1/h}$  и пространств С. Л. Соболева  $H_k^{1/h}(\mathbb{R}^n)$ .

Через  $\mathbb{R}^n$  обозначим  $n$ -мерное арифметическое пространство и через  $\mathbb{R}_n$  — его сопряженное,  $\mathbb{R}_n = (\mathbb{R}^n)^*$ . Определим операторы Лапласа, полагая

$$\Delta_x = + \sum_{i=1}^n \hat{p}_i^2, \quad \Delta_p = \sum_{i=1}^n (\hat{x}^i)^2,$$

где

$$\hat{p}_i = -ih \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\hat{x}^i = ih \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пусть теперь  $k$  — натуральное число. Введем в пространстве комплекснозначных гладких, финитных в  $\mathbb{R}^n$  функций  $f = f(x^1, \dots, x^n)$ , гладко зависящих от параметра  $h$ , структуру гильбертова пространства, полагая

$$(f, g)_k = \sup_h ([1 + |x|^2 + \Delta_x]^{k/2} f, [1 + |x|^2 + \Delta_x]^{k/2} g),$$

причем

$$(f, g)_0 = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Соответствующее полное нормированное пространство мы будем обозначать через  $H_k^{1/h}(\mathbb{R}^n)$ .

Отметим, что при любом натуральном  $k$  в пространство  $H_k^{1/h}(\mathbb{R}^n)$  входят, например, функции вида  $\exp\left(\frac{i}{h} S(x)\right) \varphi(x)$ , где  $S(x)$ ,  $\varphi(x)$  — гладкие комплекснозначные функции на  $\mathbb{R}^n$ ,  $\text{Im } S(x) \geq 0$ .  $1/h$ -преобразование Фурье  $F_{x \rightarrow p}^{1/h}$  мы определим, полагая для любой функции  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\hat{\varphi}(p) = [F_{x \rightarrow p}^{1/h} \varphi(x)](p) = \left(\frac{-i}{2\pi h}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{-\frac{i}{h} \langle x, p \rangle\right\} \varphi(x) dx, \quad (1)$$

где  $\langle x, p \rangle = x^j p_j$ .

Формула обращения преобразования Фурье имеет вид

$$\varphi(x) = [F_{p \rightarrow x}^{1/h} \hat{\varphi}(p)](x) = \left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{\frac{i}{h} \langle x, p \rangle\right\} \hat{\varphi}(p) dp. \quad (2)$$

Здесь  $\arg i = \pi/2$ .

Для  $1/h$ -преобразования Фурье  $F^{1/h}$  справедлива формула Планшереля

$$(f, g)_0 = (F^{1/h} f, F^{1/h} g),$$

которая проверяется прямой выкладкой. Из (1) следует, что для любого натурального  $k$  имеет место следующая формула коммутации:

$$F_{x \rightarrow p} (1 + |x|^2 + \Delta_x)^k = (1 + \Delta_p + |x|^2)^k F_{x \rightarrow p}.$$

**Предложение.** Преобразование (1) продолжается до ограниченного оператора

$$F^{1/h}: H_k^{1/h}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_k^{1/h}(\mathbb{R}_n), \quad (3)$$

являющегося изоморфизмом.

**Доказательство.** В самом деле, пусть  $f \in H_k^{1/h}(\mathbb{R}^n)$ . Тогда

$$\|Ff\|_k^2 = \sup_h ([1 + \Delta_p + |p|^2]^{k/2} Ff, [1 + \Delta_p + |p|^2] Ff)_0 =$$

$$= \sup_h (F[1 + |x|^2 + \Delta_x]^{k/2} f, F[1 + |x|^2 + \Delta_x]^{k/2} f)_0 =$$

$$= \sup_h ([1 + |x|^2 + \Delta_x]^{k/2} f, [1 + |x|^2 + \Delta_x]^{k/2} f)_0. \quad (4)$$

Из (4) следует, что оператор (1) непрерывен и, более того, изометричен. Существование обратного отображения следует из формулы обращения (2). Предложение доказано.

Наконец, определим пространство  $H^{1/h}(\mathbb{R}^n)$  как пересечение

$$H^{1/h}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{k=0}^{\infty} H_k^{1/h}(\mathbb{R}^n)$$

всех пространств  $H_k^{1/h}(\mathbb{R}^n)$  и снабдим его наименее сильной из топологий, в которой отображения

$$H_k^{1/h}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_0^{1/h}(\mathbb{R}^n), \quad f \mapsto \Delta^{k/2} f$$

непрерывны для всех  $k=0, 1, 2, \dots$

## Добавление II. Одна абстрактная лемма

*Лемма.* Пусть на многообразии  $L$  выбрано некоторое покрытие  $U = \{U_i\}$  открытыми окрестностями, на каждом элементе которого определен линейный оператор

$$K_i: C_0^\infty(U_i) \rightarrow H$$

в линейное пространство  $H$ , причем для любой функции  $f \in C_0^\infty(U_i \cap U_j)$  имеет место равенство

$$K_i f = K_j f.$$

Тогда существует и единствен оператор

$$K: C_0^\infty(L) \rightarrow H,$$

сужение которого на пространство  $C_0^\infty(U_i)$  совпадает с  $K_i$ .

*Доказательство.*

*Утверждение 1.* Для любой функции  $f \in C_0^\infty(L)$  и для любого покрытия  $\{U_i\}$  многообразия  $L$  существуют такие функции  $f_i$ ,  $i=1, 2, \dots, r$  что выполнены следующие условия:

$$i) \quad \text{supp } f_i \subset U_i;$$

$$ii) \quad f = \sum_{i=1}^r f_i.$$

Доказательство этого утверждения следует из существования разбиения единицы на гладком многообразии.

Пусть теперь  $f \in C_0^\infty(L)$ .

*Определение.*

$$Kf = \sum K_i f_i. \quad (1)$$

Утверждение 2. Определение (1) корректно, т. е. не зависит от выбора функций  $\{f_i\}$ .

Доказательство. Покажем, что если

$$\text{supp } f_i \subset U_i, \quad i=1, 2, \dots, r, \quad \sum f_i = 0,$$

то справедливо равенство  $\sum K_i f_i = 0$ .

Доказательство последнего утверждения проведем индукцией по числу  $r$ . При  $r=1$  нужное утверждение, очевидно, следует из линейности оператора  $K$ . Пусть оно справедливо для  $r=k-1$ . Рассмотрим функцию  $f_1$ ,  $\text{supp } f_1 \subset U_1$ , и множество

$$U_1 \setminus \bigcup_{i=2}^k U_i = V.$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^r f_i = f_1 + \sum_{i=2}^k f_i = 0$$

и выполнено включение

$$\text{supp } \sum_{i=2}^k f_i \subset \bigcup_{i=2}^k U_i,$$

то  $f_1|V=0$ . Следовательно,

$$\text{supp } f_1 \subset \bigcup_{i=2}^k V_i,$$

где  $V_i = U_i \cap U_1$ . Тогда в силу утверждения 1 существуют такие функции  $q_i$ , что

$$f_1 = \sum_{i=2}^k q_i, \quad \text{supp } q_i \subset V_i.$$

Поэтому в силу линейности оператора  $K$  получаем

$$K_1 f_1 = \sum_{i=2}^k K_i q_i = \sum_{i=2}^k K_i q_i.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k K_i f_i &= K_1 f_1 + \sum_{i=2}^k K_i f_i = \sum_{i=2}^k K_i q_i + \sum_{i=2}^k K_i f_i = \\ &= \sum_{i=2}^k K_i (q_i + f_i) = \sum_{i=2}^k K_i h_i, \quad \text{где } h_i = q_i + f_i. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что из построения функций  $q_i$  и свойств функций  $f_i$  следует, что  $\sum_{i=2}^k h_i = 0$ . По предположению индукции отсюда следует, что

$$\sum_{i=2}^k K_i h_i = 0.$$

Утверждение 2 доказано.

Для доказательства корректности мы предположим теперь, что функция  $f$  представлена двумя разными способами:

$$f = \sum_{i=1}^r f_i = \sum_{j=1}^l g_j.$$

Тогда  $\sum_{i=1}^r f_i - \sum_{j=1}^l g_j = 0$  и линейность оператора вместе с доказанным выше утверждением показывает, что

$$\sum_{i=1}^r K_i f_i = \sum_{j=1}^l K_j g_j.$$

Корректность определения установлена.

Утверждение 3. *Существует не более одного оператора, удовлетворяющего условиям леммы.*

Доказательство. В самом деле, пусть  $K'$  — другой оператор, и пусть  $f \in C_0^\infty(L)$ . Тогда в силу утверждения 1 существует такой набор функций

$$\{f_i\}, f = \sum f_i \text{ supp } f_i \subset U_i,$$

что

$$Kf = \sum Kf_i = \sum K_i f_i,$$

$$K'f = \sum K'f_i = \sum K'_i f_i.$$

Поскольку  $K'_i = K_i$ , то и  $Kf = K'f$ . Утверждение 3, а вместе с ним и лемма доказаны полностью.

## Г Л А В А VII

### ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ФУРЬЕ (ГЛАДКАЯ ТЕОРИЯ КАНОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА)

Теория интегральных операторов Фурье, возникшая в конце шестидесятих годов, в настоящее время переживает бурный расцвет. Десятки работ, появившихся в мировой математической литературе, переизлагают, обобщают, используют теорию интегральных операторов Фурье. И это естественно. После увлечения эллиптической теорией, повлекшей за собой расцвет теории псевдодифференциальных операторов, возник вначале робкий, а затем все более сильный интерес к неэллиптической теории — уравнениям с вещественными характеристиками. Однако техника псевдодифференциальных операторов, хорошо работавшая в эллиптической теории, оказалась мало пригодной для решения этого нового круга задач.

Принципиальная новизна в теории уравнений с вещественными характеристиками заключалась в том, что, в отличие от эллиптического случая, здесь почти обратный оператор не является псевдодифференциальным оператором. Начинаются первые попытки исправить или как-то дополнить старую технику, с тем чтобы приспособить ее к новой ситуации. Одной из таких попыток было привлечение (ко)граничных операторов — по-видимому, первых (нетривиальных) интегральных операторов Фурье. Затем в ряде работ, главным образом советских математиков, появляются некоторые обобщения псевдодифференциальных операторов. Вместо линейной фазы в интеграле Фурье появляется произвольная однородная функция. Это первый шаг в нужном направлении. Накапливается опыт обращения с такого рода операторами. Це-

лый ряд задач настойчиво показывает существование не- которого общего технического аппарата. Будущие инте- гральные операторы Фурье, появляются в самых, казалось бы, неожиданных ситуациях, например, при исследовании преобразования псевдодифференциальных операторов, индуцированного каноническим диффеоморфизмом фа- зового пространства и др. Все яснее и яснее про- глядываются общие принципы новой техники. Остается сделать еще один шаг. И вот, наконец, в 1971 г. появля- ется публикация шведского математика Л. Хермандера [3], в которой излагается математический аппарат, наз- ванный им методом интегральных операторов Фурье, по- зволяющий с успехом решать нужные задачи. Новая тех- ника стремительно развивается, и вскоре интегральные операторы Фурье завоевывают широкую популярность среди специалистов. Хлынул поток публикаций по при- менению и обобщению метода интегральных операторов Фурье.

Приблизительно аналогичным образом обстояло дело в другой, казалось бы, далекой области математики — задаче о построении асимптотических решений уравне- ний с малым параметром. Старый метод построения асимптотик — метод ВКБ — давал удовлетворительные результаты только «в малом» и был совершенно непри- годен для глобальных рассмотрений. Делались много- численные попытки обобщить метод ВКБ, приспособив его к исследованию решений вблизи особых (фокальных, каустических) точек, и хотя иногда это удавалось сделать с использованием ряда искусственных и очень тонких приемов (см., например, Бабиш В. М., Булдырев В. С. [1] и др.), общая схема построения асимптотики в целом бы- ла неизвестна.

Замечательное решение этой задачи было предложено в 1965 г. В. П. Масловым, который не только дал общий метод нахождения асимптотики решения в «целом», но и выяснил, что целый ряд других классических задач, на- пример, задача о распространении в «большом» разры- ва начальных данных в гиперболических уравнениях мо- жет быть решена его методом. Заметим, что последняя задача включает, в частности, и задачу построения асим- птотики решения по гладкости, т. е. задачу, для которой и был создан метод интегральных операторов Фурье.



Получилось, таким образом, что к моменту упомянутой выше публикации Л. Хермандера уже имелся метод и развитый технический аппарат, адекватный методу интегральных операторов Фурье. Более того, позднее выяснилось, что метод канонического оператора Маслова, примененный в ситуации интегральных операторов Фурье, в точности совпадает с последним. При этом кажущееся различие в окончательной форме является чисто внешним: рядом тождественных преобразований интегральный оператор Фурье может быть приведен к каноническому оператору Маслова.

Отметим, однако, что методы построения обеих теорий имеют ряд существенных отличий. С этой точки зрения представляет, по-видимому, интерес изложение теории интегральных операторов Фурье методом Маслова, тем более что, как нам кажется, последний гораздо прозрачнее, геометричнее и позволяет получить ответ в более законченном виде.

Проиллюстрируем на примере простейшей задачи идеи и основные понятия метода интегральных операторов Фурье — Маслова. При этом в изложении мы не будем стремиться к излишней строгости в тех местах, где эта строгость могла бы загроздить техническими подробностями идейную сторону метода. В частности, здесь совершенно не затронут вопрос об оценках интегральных операторов Фурье в пространствах С. Л. Соболева. Точные и строгие формулировки всех понятий и теорем, содержащихся в них, читатель найдет в §§ 7.1—7.5.

В качестве первого примера рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} i \frac{\partial u}{\partial t} &= H(\hat{p}) u, \\ u|_{t=0} &= \varphi(x), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $H(\hat{p})$  — псевдодифференциальный оператор с вещественным символом  $H(p)$ , не зависящим от  $x = (x^1, \dots, x^n)$  и положительно однородным порядка 1 по  $p = (p_1, \dots, p_n)$ :

$$H'_1(\hat{p}) = F_{p \rightarrow x} H(p) F_{x \rightarrow p}.$$

В частности,  $\hat{p} = -i \frac{\partial}{\partial x}$ . Здесь и далее через  $F_{x \rightarrow p}$  мы

будем обозначать оператор преобразования Фурье

$$F_{x \rightarrow p}[f] = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-i\langle x, p \rangle\} f(x) dx,$$

а через  $F_{p \rightarrow x}$  — оператор обратного преобразования Фурье.

Метод, который мы применим для решения задачи (1), не есть метод интегральных операторов Фурье, однако формулы, которые мы получим для решения, послужат нам в дальнейшем моделью для построения решений (в более сложных ситуациях) методом интегральных операторов Фурье.

Для решения задачи (1) сделаем преобразование Фурье по переменным  $x$ , обозначив  $\tilde{u}(p, t) = F_{x \rightarrow p}[u]$ . Получим

$$i \frac{d\tilde{u}}{dt} = H(p) \tilde{u}, \quad \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(p).$$

В результате получена задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, решение которой можно представить в виде

$$\tilde{u}(p, t) = \tilde{\varphi}(p) e^{-itH(p)}.$$

Решение задачи (1) запишем в следующей форме:

$$u(x, t) = F_{p \rightarrow x}[\tilde{\varphi}(p) \exp(-itH(p))] = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y, t) \varphi(y) dy, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} K(x, y, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \exp\{i[\langle p, x - y \rangle - tH(p)]\} dp = \\ &= F_{\xi \rightarrow y}[\exp(iS(x, \xi, t))], \quad (3) \\ S(x, \xi, t) &= -\langle \xi, x \rangle - tH(-\xi), \end{aligned}$$

причем сходимость последнего интеграла нужно понимать в пространстве обобщенных функций  $D'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  по переменным  $(x, y)$ . При этом формула (2) дает решение задачи (1) в обобщенном смысле при начальной функции  $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Более точное исследование

пространств, в которых разрешимы задача (1) и аналогичные ей задачи, будет дано ниже. Отметим, что формулы (2) и (3) представляют собой простейший пример интегрального оператора Фурье.

Рассмотрим теперь более сложную задачу

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = H(t, x, \hat{p}) u, u|_{t=0} = \varphi(x). \quad (4)$$

Будем искать решение этой задачи в форме, аналогичной (2):

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y, t) \varphi(y) dy,$$

Подставляя это выражение в задачу (4), получаем, что для любого начального данного  $\varphi(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  функция  $K$  должна быть решением задачи

$$i \frac{\partial}{\partial t} K(x, y, t) - H(t, x, \hat{p}) K(x, y, t) = 0, \quad (5)$$

$$K(x, y, 0) = \delta(x - y)$$

(оператор  $H(x, \hat{p})$  действует только по переменным  $x$ ). Мы будем искать не точное решение задачи (5), а так называемую асимптотику по гладкости. Иными словами, мы найдем такую функцию  $K(x, y, t)$ , чтобы при подстановке ее в задачу (5) правые и левые части отличались на достаточно гладкую функцию переменных  $x, y, t$ . Это позволит провести редукцию задачи (4) к интегральному уравнению вольтерровского типа.

Приступим к решению поставленной задачи. Прежде всего представим начальные данные в следующей специальной форме:

$$K(x, y, 0) = \delta(x - y) = F_{\xi \rightarrow y} [1/(2\pi)^{n/2} \exp(-i \langle x, \xi \rangle)]. \quad (6)$$

Будем искать асимптотическое решение задачи (5) по аналогии с формулой (3) в виде

$$K(x, y, t) = F_{\xi \rightarrow y} [\exp(iS(x, \xi, t)) \zeta(\xi) a(x, \xi, t)], \quad (7)$$

причем функция  $S(x, \xi, t)$  считается однородной по

переменной  $\xi$  первой степени,

$$a(x, \xi, t) = \sum_{n=0}^N a_{-n}(x, \xi, t), \quad (8)$$

и функции  $a_j(x, \xi, t)$  однородны по  $\xi$  степени  $j$ . Функция  $\zeta(\xi)$ , введенная для устранения особенности при  $\xi=0$  в формуле (7), равна 0 в окрестности нуля и 1 в окрестности бесконечности. Отметим, что изменение функции  $\zeta(\xi)$  влечет изменение  $K(x, y, t)$  на бесконечно гладкую функцию переменных  $x, y, t$ .

Легко видеть, что чем больше отрицательная степень однородности функции  $a$  в формуле (7), тем более гладкую функцию  $K(x, y, t)$  эта формула определяет, поскольку интегралы в (7) сходятся тем лучше, чем быстрее функция  $a$  убывает при  $|\xi| \rightarrow \infty$ . Поэтому разложение (8) функции  $a$  отвечает разложению ядра  $K(x, y, t)$  по гладкости.

Подставляя выражения (6) и (7) в задачу (5), получим

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} [\exp(iS(x, \xi, t)) \zeta(\xi) a(x, \xi, t)] = \\ = H(t, x, \hat{p}) [\exp(iS(x, \xi, t)) \zeta(\xi) a(x, \xi, t)], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\exp(iS(x, \xi, 0)) a(x, \xi, 0) \zeta(\xi) = 1/(2\pi)^{n/2} \exp(-i\langle x, \xi \rangle) \zeta(\xi).$$

(Введение в начальное условие множителя  $\zeta(\xi)$  приводит, очевидно, к изменению начального условия задачи (5) на бесконечно дифференцируемую функцию.)

Воспользовавшись определением оператора  $H(x, \hat{p})$  и методом стационарной фазы, нетрудно получить равенство

$$\begin{aligned} H(t, x, \hat{p}) [\exp(iS(x, \xi, t)) \zeta(\xi) \varphi(x, \xi, t)] = \\ = \exp(iS(x, \xi, t)) \zeta(\xi) \left\{ H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) - \right. \\ \left. - i \left[ \frac{\partial H}{\partial p_j} \left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_k} \right] + \right. \\ \left. + \sum_{r=2}^N P_{-r} \left(t, \xi, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right\} a(x, \xi, t) + F(x, \xi, t), \end{aligned}$$

где операторы  $P_{-r}$  есть дифференциальные операторы по  $x$  порядка  $r$  с однородными по  $\xi$  порядка  $-r$  коэффициентами, а  $F(x, \xi, t)$  представляют собой сумму однородных по  $\xi$  функций порядка не выше  $-N$ . Подставляя последнее выражение в (9) и разделяя по степеням однородности по  $\xi$ , получим в старшем члене уравнения для  $S$ :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0, \quad (10)$$

$$S(x, \xi, 0) = -\langle x, \xi \rangle.$$

В целях удобства дальнейшего изложения теории мы будем рассматривать  $x$  и  $\xi$  как независимые переменные, не обращая внимания на то, что  $\xi$  входит в задачу (10) в качестве параметра. Иначе говоря, мы будем рассматривать задачу (10) как частный случай более общей задачи

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tilde{H}\left(t, x, -\frac{\partial S}{\partial \xi}, \frac{\partial S}{\partial x}, \xi\right) = 0, \quad (11)$$

$$S(x, \xi, 0) = S_0(x, \xi) = -\langle x, \xi \rangle$$

для специальной функции

$$\tilde{H}(t, x, y, p, \xi) = H(x, t, p),$$

не зависящей от переменных  $y$  и  $\xi$ .

Решение задачи (11) проводится методом характеристик. Дадим описание начальных данных этой задачи с помощью многообразия  $L_0$  в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^{2n} \oplus \mathbb{R}_{2n}$  с координатами  $(x, y, p, \xi)$ :

$$L_0 = \left\{ (x, y, p, \xi) \mid y = -\frac{\partial S_0(x, \xi)}{\partial \xi} = x; p = \frac{\partial S_0(x, \xi)}{\partial x} = -\xi \right\}. \quad (12)$$

При этом функция  $S_0(x, \xi)$  может быть восстановлена по многообразию  $L_0$  как однородное (степени 1) решение уравнения Пфаффа на  $L_0$ :

$$dS_0 = p dx - y d\xi.$$

Отметим, что такое решение существует, так как много-

образе  $L_0$  является лагранжевым,

$$dp \wedge dx + d\xi \wedge dy|_{L_0} = 0,$$

и коническим, т. е. вместе с точкой  $(x, y, p, \xi) \in L$  многообразия  $L$  содержит весь луч  $(x, y, \lambda p, \lambda \xi) \in L, \lambda \in \mathbf{R}_+$ , где  $\mathbf{R}_+$  — множество положительных вещественных чисел. При этом решение  $S(x, \xi, t)$  задачи (11) при достаточно малых  $t$  может быть получено следующим образом. Рассмотрим операцию сдвига вдоль траекторий системы Гамильтона

$$\dot{x}^j = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x^j}, \quad \dot{y}^j = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \xi_j}, \quad \dot{\xi}_j = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y^j}.$$

В результате операции сдвига точек многообразия  $L_0$  в момент  $t$  получается новое многообразие  $L_t$ . Положим  $L = \bigcup_t L_t$ . Рассмотрим такой малый интервал значений параметра  $t$ , чтобы многообразие  $L$  диффеоморфно проектировалось на плоскость  $(x, \xi)$  фазового пространства. Тогда функция  $S(x, \xi, t)$  может быть получена как решение уравнения Пфаффа на многообразии  $L$ :

$$dS = p dx - y d\xi - H(t, x, p) dt.$$

Для случая системы (10), когда  $\tilde{H}$  не зависит от  $y, \xi$ , система Гамильтона принимает вид

$$\dot{x}^j = \frac{\partial H(t, x, p)}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H(t, x, p)}{\partial x^j}, \quad \dot{y}^j = 0, \quad \dot{\xi}_j = 0. \quad (13)$$

Решение системы Гамильтона (13) с начальными условиями (12) допускает следующую интерпретацию. Рассмотрим изоморфизм

$$j: T^*(\mathbf{R}^{2n}) = \mathbf{R}^{2n} \oplus \mathbf{R}_{2n} \rightarrow T^*(\mathbf{R}^n) \times T^*(\mathbf{R}^n) = (\mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}_n) \times (\mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}_n),$$

который задается формулой

$$j(x, y, p, \xi) = ((x, p), (y, -\xi)).$$

Образ  $j(L_0)$  многообразия  $L_0$  при этом изоморфизме есть диагональ пространства  $T^*(\mathbf{R}^n) \times T^*(\mathbf{R}^n)$ . Сдвиг на фиксированное время  $t$  вдоль траекторий системы (13) в

пространстве  $T^*(\mathbf{R}^n) \oplus T^*(\mathbf{R}^n)$  определяет каноническое отображение

$$(y, \xi) \rightarrow (x, p) = (X(t, y, \xi), P(t, y, \xi)),$$

где  $X, P$  — решения системы (13) с начальными данными  $X(0, y, \xi) = y, P(0, y, \xi) = \xi$ . Нетрудно видеть, что  $j(L_t)$  есть график этого канонического отображения.

Если записать уравнение в задаче (4) в виде

$$\mathcal{H}(t, x, \hat{p}, \hat{E}) u = \left( -i \frac{\partial}{\partial t} + H(t, x, \hat{p}) \right) u = 0,$$

где оператору  $\mathcal{H}$  отвечает символ  $E + H(t, x, p)$ ,  $E$  — двойственная к  $t$  переменная и  $\hat{E} = -i \frac{\partial}{\partial t}$ , то можно отметить также следующую трактовку многообразия  $L$ , которая понадобится нам в дальнейшем. Вложим многообразие  $L$  в расширенное фазовое пространство  $\mathbf{R}^{2n+1} \oplus \mathbf{R}_{2n+1}$  с координатами  $(t, x, p, E)$ , задав новую координату  $E$  по формуле

$$E = \frac{\partial S}{\partial t} = -H(t, x, p).$$

Тогда многообразие  $L$ , рассматриваемое в этом пространстве, есть лагранжево многообразие относительно формы  $dp \wedge dx + dE \wedge dt$ , лежащее целиком в множестве нулей символа  $E + H(t, x, p)$ .

Обратимся теперь к уравнению для функции  $a_0(x, \xi, t)$  (см. формулу (8)). Выделяя в уравнении (9) члены нулевой степени однородности по  $\xi$ , мы получим уравнение для определения  $a_0$ :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_k} \right] a_0(x, \xi, t) = 0, \quad (14)$$

$$a_0(x, \xi, 0) = 1/(2\pi)^{n/2}.$$

Пользуясь тем, что многообразие  $L_t$  при рассматриваемых  $t$  диффеоморфно проектируется на плоскость  $(x, \xi)$ , поднимем функцию  $a_0(x, \xi, t)$  на многообразие  $L = \bigcup_t L_t$ .

Отметим, что при этом

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) a_0 = \frac{d}{dt} a_0,$$

где  $d/dt$  — производная вдоль траекторий системы Гамильтона (13). Таким образом, задачу (14) можно переписать в виде

$$\left[ \frac{d}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_k} (x, t, p) \right]_L a_0 = 0, \quad (15)$$

$$a_0|_{t=0} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}.$$

Обозначим теперь

$$J = \det \left[ \frac{DX(x, y, \xi)}{Dy} \right] \Big|_L, \quad J|_{t=0} = 1.$$

Очевидно,  $J^{-1}$  есть плотность меры  $\mu = dy \wedge d\xi$  относительно координат  $(x, \xi)$ . Заметим, что эта мера инвариантна относительно сдвига вдоль траекторий системы Гамильтона (13). Отсюда можно вывести, что  $J$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} (\ln J) = \frac{\partial^2 H}{\partial x^j \partial p_j} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_k} \Big|_L. \quad (16)$$

Делая замену функции  $a_0 = \varphi_0 \cdot J^{-1/2}$ , мы приведем уравнение (15) с учетом соотношения (16) к виду

$$\left[ \frac{d}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^j \partial p_j} \Big|_L \right] \varphi_0 = 0, \quad (17)$$

$$\varphi|_{t=0} = 1/(2\pi)^{n/2}.$$

Нетрудно убедиться в том, что решения уравнений Гамильтона — Якоби (10) и уравнения переноса (17), полученные описанным способом, являются однородными функциями переменной  $\xi$ . Таким образом, мы получили следующий результат. При тех значениях  $t$ , при которых многообразие  $L_t$  диффеоморфно проектируется на плоскость  $(x, \xi)$ , решение задачи (5) с точностью до более гладких функций может быть представлено в форме

$$K(x, y, t) = F_{\xi \rightarrow y} [\exp(iS(x, \xi, t)) \zeta(\xi) \sqrt{m(x, \xi, t)} \varphi_0(x, \xi, t)], \quad (18)$$

где  $m$  — плотность меры  $\mu$ , а  $S$  и  $\varphi_0$  являются решениями задач (10) и (17) соответственно.



Рассмотрим теперь вопрос о том, в каком виде нужно искать решение задачи (5) при тех значениях  $t$ , где многообразие  $L_t$  не проектируется диффеоморфно на плоскость  $(x, \xi)$ . Поскольку, как показано выше,  $L_t$  есть график канонического отображения, то для каждой точки  $\alpha$  многообразия  $L_t$  существует плоскость вида

$$(x^{i_1}, \dots, x^{i_k}, p_{i_{k+1}}, \dots, p_{i_n}, \xi) = (x^I, p_{\bar{I}}, \xi),$$

на которую окрестность точки  $\alpha$  многообразия  $L_t$  проектируется однозначно (лемма 1.1 гл. II). Здесь  $(i_1, \dots, i_k, i_{k+1}, \dots, i_n)$  — перестановка  $(1, \dots, n)$ ,  $I = (i_1, \dots, i_k)$ ,  $\bar{I} = (i_{k+1}, \dots, i_n)$  — дополнение к  $I$  в множестве  $[n] = (1, \dots, n)$ . Множество на  $L$  с координатами  $(x^I, p_{\bar{I}}, \xi, t)$  мы будем называть канонической картой. Отметим, что рассмотренный выше случай отвечает  $I = [n]$ ,  $\bar{I} = \emptyset$ . Вычислениями, аналогичными проведенным выше, нетрудно показать, что в карте  $U_I$  с координатами  $(x^I, p_{\bar{I}}, \xi, t)$  решение задачи (5) может быть получено в виде

$$K(x, y, t) = F_{\xi \rightarrow y} F_{p_{\bar{I}} \rightarrow x^I} [\exp(iS(x^I, p_{\bar{I}}, \xi, t)) \xi(\xi, p_{\bar{I}}) \sqrt{\mu_I} \varphi_0], \quad (19)$$

причем функция  $S_I$  определяется соотношением

$$dS_I = p_I dx^I - x^{\bar{I}} dp_{\bar{I}} - y d\xi - H(t, x, p) dt,$$

$\mu_t$  есть плотность меры  $\mu$  относительно координат  $(x^I, p_{\bar{I}}, \xi)$ , а функция  $\varphi_0$  есть решение уравнения (17). Более того, для каждого двух карт  $U_I$  и  $U_J$  можно выбрать ветви корня, входящего в (19) таким образом, чтобы выражения (18) и (19) совпадали по модулю более гладких функций. Отметим тот факт, что функция  $\varphi_0$  становится функцией, глобально определенной на многообразии  $L$  только благодаря введению дополнительного множителя  $\sqrt{\mu_t}$ . Более того, эта функция удовлетворяет глобальному на многообразии  $L$  уравнению (17).

Остался еще открытым вопрос о том, можно ли выбрать ветвь корня  $\sqrt{\mu_t}$  во всех картах сразу так, чтобы выражения (19) определяли одну и ту же функцию (по модулю более гладких функций). Многообразия, на которых такой выбор может быть произведен, называются

квантованными многообразиями. Подробное обсуждение этого понятия мы проведем в основном тексте главы.

Таким образом, мы получили следующий результат. Решение задачи (5) по модулю более гладких функций при всех  $(x, y, t)$  можно записать в виде

$$K(x, y, t) = \sum_I F_{\xi \rightarrow y} F_{p_I \rightarrow x} \bar{I} [\exp(iS_I) \zeta] \sqrt{\mu_I} \Phi_0 e_I, \quad (20)$$

где суммирование проводится по каноническим картам  $U_I$  многообразия  $L$  при данном  $t$ , а  $e_I$  — разбиение единицы, подчиненное покрытию  $\{U_I\}$ . Функцию (20) мы будем называть *каноническим распределением*, а оператор (2) с ядром (20) — *интегральным оператором Фурье*.

Рассмотрим теперь задачу (4) на замкнутом компактном многообразии  $M$  без края. Все приведенные рассуждения без труда обобщаются на этот случай. Однако следует учесть следующее обстоятельство. Выражение  $\int_M K(x, y) f(y) dy$  не является корректным на многообразии  $M$ , поскольку оно меняется при замене локальной системы координат. Однако, если предположить, что  $f$  и  $K$  являются плотностями порядка  $1/2$ , т. е. при замене координат преобразуются по формулам

$$K'(x', y') = K(x(x'), y(y')) \left| \frac{\partial y}{\partial y'} \right|^{1/2} \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^{1/2},$$

$$f'(y') = f(y(y')) \left| \frac{\partial y}{\partial y'} \right|^{1/2},$$

то указанное выражение корректно определено на  $M$  и задает плотность порядка  $1/2$ , зависящую от  $x \in M$ . Поэтому при рассмотрении этого случая мы будем считать, что задача (4) рассматривается не на функциях, а на плотностях порядка  $1/2$ . Переход к случаю функций достигается делением на некоторую стандартную плотность порядка  $1/2$ .

В последнее время теория интегральных операторов Маслова нашла применение в широком круге вопросов, связанных с исследованием локальной и глобальной разрешимости линейных уравнений, задачами классификации уравнений, изучением волновых фронтов решений,

построением асимптотик и др. Покажем, например, как работает техника интегральных операторов в задаче о построении преобразования псевдодифференциальных операторов, отвечающего каноническому диффеоморфизму фазового пространства. Как известно, решение этой задачи, данное Ю. В. Егоровым, привело к важным и глубоким результатам в теории локальной разрешимости псевдодифференциальных уравнений.

Постановка задачи такова. Пусть  $H_1(x, p)$ ,  $H_2(x, p)$  — два однородных по переменным  $p$  символы на

$$T^*(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n,$$

и пусть

$$g: T^*\mathbb{R}^n \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$$

— однородный канонический диффеоморфизм такой, что

$$g^*(H_1) = H_2.$$

Требуется построить с точностью до гладких функций такой оператор  $\hat{U}_g$ , что

$$\hat{U}_g^{-1} H_1(x, \hat{p}) \hat{U}_g = H_2(x, \hat{p}). \quad (21)$$

По аналогии с разобранным выше случаем перехода от задачи (4) к задаче (5) мы будем искать оператор  $\hat{U}_g$  в виде

$$\hat{U}_g u = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) u(y) dy. \quad (22)$$

Подставляя формулу (22) в (21), получим уравнение для определения ядра  $K(x, y)$ :

$$[H_1(x, \hat{p}) - H_2(y, \hat{\xi})] K(x, y) = 0. \quad (23)$$

Решение задачи (23) дается каноническим распределением на (лагранжевом) многообразии

$$L_g = j^{-1}(\text{graph } g),$$

причем в качестве меры выбирается фазовый объем (инвариантность которого гарантируется теоремой Лиувилля).

## § 7.1. Канонические распределения в пространстве $R^n$

В этом параграфе дается конструктивное описание некоторого класса распределений в пространстве  $R^n$ . Именно, для произвольного квантованного конического лагранжева погружения в  $T^*R^n \setminus \{0\} = T_0^*(R^n)$  с мерой  $\mu$  строится оператор  $K$ , который мы называем гладким каноническим оператором на коническом лагранжевом погружении с мерой. Каноническими называются распределения, которые принадлежат области значений оператора  $K$ .

Пусть  $R^n$  —  $n$ -мерное арифметическое векторное пространство с координатами  $(x^1, \dots, x^n)$ . Обозначим через  $T_0^*(R^n)$  кокасательное расслоение к пространству  $R^n$  без точек нулевого сечения, снабженное симплектической структурой \*)

$$\omega = dp_i \wedge dx^i = dp \wedge dx.$$

Определим на пространстве  $T^*(R^n)$  действие группы  $R_+$  положительных вещественных чисел, считая

$$\lambda(x, p) = (x, \lambda p), \quad \lambda \in R_+.$$

Пусть  $L$  —  $n$ -мерное гладкое многообразие, на котором свободно действует группа  $R_+$  положительных вещественных чисел,  $\mu$  — гладкая невырожденная вещественная мера на  $L$ .

**О п р е д е л е н и е 1.1.** *Гладкое погружение*

$$i: L \rightarrow T_0^*R^n,$$

*перестановочное с действием группы  $R_+$  называется коническим лагранжевым погружением с мерой, если*

1°. *Обратный образ на  $L$  формы  $\omega$  равен нулю:*

$$i^*\omega = 0.$$

2°. *Мера  $\mu$  однородна, некоторого порядка  $m$ :*

$$\lambda^* \mu = \lambda^m \mu \text{ для любого } \lambda \in R_+. \quad (1.1)$$

---

\*) Здесь  $(x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$  — естественные координаты в  $T^*(R^n)$ .

**Определение 1.2.** *Коническое лагранжево погружение называется квантованным, если индекс  $\text{ind } \gamma$  произвольного цикла  $\gamma$  на многообразии  $L$  сравним с нулем по модулю 4 (т. е.  $\text{ind}$  определяет нулевой элемент группы  $H^1(M, \mathbb{Z}_4)$ ):*

$$\text{ind } \gamma \equiv 0 \pmod{4}^*).$$
 (1.2)

Обозначим через  $\Omega$  следующую форму на  $T_0^*(\mathbb{R}^n)$ :

$$\Omega = p dx = p_i dx^i.$$

**Лемма 1.1.** *Пусть  $i$  — коническое лагранжево погружение. Тогда*

$$i^* \Omega = 0.$$
 (1.3)

**Доказательство.** Поскольку вектор  $p \frac{\partial}{\partial p}$  касателен к погруженному многообразию  $i(L)$  и  $i^* d\Omega = 0$ , то

$$p \frac{\partial}{\partial p} \lrcorner i^* d\Omega = 0.$$

Поскольку

$$p \frac{\partial}{\partial p} \lrcorner d\Omega = p \frac{\partial}{\partial p} \lrcorner dx \wedge dp = p dx,$$

имеем

$$p \frac{\partial}{\partial p} \lrcorner i^* d\Omega = i^* \left( p \frac{\partial}{\partial p} \lrcorner d\Omega \right) = i^* \Omega.$$

Лемма доказана.

Мы будем рассматривать только квантованные конические лагранжевы погружения, т. е. такие, для которых выполнены равенства (1.2), (1.3).

**Лемма 1.2.** *Пусть  $i$  — коническое лагранжево погружение многообразия  $L$ ,  $\alpha \in L$  — произвольная точка. Существуют такая окрестность  $V$  точки  $\alpha$  и такой набор индексов*

$$I = \{i_1, \dots, i_k\} \in [n] = \{1, 2, \dots, n\},$$

$$\bar{I} = \{i_{k+1}, \dots, i_n\} = [n] \setminus I,$$

---

\*) Через  $\text{ind } \gamma$  обозначается удвоенное значение коцикла  $C^{(2)}$ , определенного в § 4.1 на цикле  $\gamma$ .

что функции

$$(x^I, p_{\bar{I}}) = (x^{i_1}, \dots, x^{i_k}, p_{i_{k+1}}, \dots, p_{i_n})$$

образуют локальную каноническую систему координат в окрестности  $V$ . (Здесь и далее мы для краткости пишем  $x^I$  вместо  $i^*x^I$  и т. д.)

**З а м е ч а н и е.** Так как коническое множество в  $T_0^*R^n$  не может диффеоморфно проектироваться на  $x$ -плоскость  $p = \text{const}$ , то в случае конического лагранжева погружения канонический атлас не содержит карт  $U_I$ , для которых  $\bar{I} = \emptyset$ .

Пусть  $U_I$  — одна из карт канонического атласа. Мера  $\mu$  может быть записана в локальных координатах:

$$\mu|_{U_I} = \mu_I dx^I \wedge dp_{\bar{I}}. \quad (1.4)$$

Из условия квантования (1.2) следует, что в коцепи  $\{\arg \mu_I\}$  ветви  $\arg \mu_I$  аргумента плотности меры в различных картах канонического атласа могут быть выбраны таким образом, что в пересечениях карт  $U_I \cap U_J$

$$\arg \mu_I - \arg \mu_J \equiv \sum \arg \lambda_k + |I_2| \pi \pmod{2\pi}. \quad (1.5)$$

Здесь  $I_1 = I \cap J$ ,  $I_2 = I \setminus J$ ,  $I_3 = J \setminus I$ ,  $I_4 = I \cup J$ ,  $|I_2|$  — число элементов множества  $I_2$ ,  $\lambda_k$  — собственные значения матрицы

$$\frac{\partial(-p_{I_2}, x^{I_3})}{\partial(x^{I_2}, p_{I_1})}, \quad -3\pi/2 < \arg \lambda_k \leq \pi/2.$$

При вычислении частных производных по  $x^{I_3}$  и  $p_{I_2}$  элементы  $p_{I_2}$  и  $x^{I_3}$  рассматриваются как функции локальных координат  $(x^I, p_{\bar{I}})$  в карте  $U_I$

$$p_{I_2} = p_{I_2}(x^I, p_{\bar{I}}), \quad x^{I_3} = x^{I_3}(x^I, p_{\bar{I}}).$$

В дальнейшем предполагается зафиксированным набор  $\{\arg \mu_I\}$ , удовлетворяющий условию (1.5).

Следующая лемма носит технический характер.

**Лемма 1.3.** Функция  $\mu_I^*(x^I, p_{\bar{I}})$  однородна по переменным  $p_{\bar{I}}$  порядка  $m - |\bar{I}|$ , где  $m$  — порядок однородности меры  $\mu$  (см. равенство (1.1)).

**Доказательство.** Воспользовавшись равенствами (1.1) и (1.4), получим

$$\begin{aligned}\lambda^m \mu &= \lambda^* \mu = \lambda^* (\mu_I(x^I, p_{\bar{I}})) dx^I \wedge dp_{\bar{I}} = \\ &= \mu_I(x^I, \lambda p_{\bar{I}}) dx^I \wedge d\lambda p_{\bar{I}} = \lambda^{|\bar{I}|} \mu_I(x^I, \lambda p_{\bar{I}}) dx^I \wedge dp_{\bar{I}}.\end{aligned}$$

Сравнивая получившееся выражение с (1.4), получаем, что

$$\lambda^m \mu_I(x^I, p_{\bar{I}}) = \lambda^{|\bar{I}|} \mu_I(x^I, \lambda p_{\bar{I}}),$$

т. е.  $\mu_I(x^I, \lambda p_{\bar{I}}) = \lambda^{(m-|\bar{I}|)} \mu_I(x^I, p_{\bar{I}})$ . Лемма доказана.

Определим теперь другую кощепь канонического покрытия — *действие*. Рассмотрим в карте  $U_I$  функцию действия  $S_I(x^I, p_{\bar{I}})$ , которая определяется из уравнения Пфаффа

$$dS_I = p_I dx^I - x^{\bar{I}} dp_{\bar{I}}. \quad (1.6)$$

Здесь  $p_I = p_I(x^I, p_{\bar{I}})$ ,  $x^{\bar{I}} = x^{\bar{I}}(x^I, p_{\bar{I}})$  — функции локальных координат в карте  $U_I$ . Уравнение (1.6) разрешимо, так как форма, стоящая в его правой части, замкнута (ее дифференциал равен  $i^* \omega$ ). Функция  $S_I$  определена с точностью до прибавления произвольной постоянной. Чтобы избавиться от произвола в определении функции  $S_I$ , потребуем, чтобы она была однородной функцией степени 1 переменных  $p_{\bar{I}}$ .

**Лемма 1.4. Функция**

$$S_I(x^I, p_{\bar{I}}) = -x^{\bar{I}}(x^I, p_{\bar{I}}) p_{\bar{I}} \quad (1.7)$$

*однородна степени 1 относительно переменных  $p_{\bar{I}}$ , и удовлетворяет уравнению (1.6).*

**Доказательство.** Так как форма

$$i^* \Omega = p dx = p_I dx^I + p_{\bar{I}} dx^{\bar{I}}$$

равна нулю на  $L$ , то мы можем записать

$$\begin{aligned}dS_I &= -d(x^{\bar{I}} p_{\bar{I}}) = p dx - d(x^{\bar{I}} p_{\bar{I}}) = \\ &= p_I dx^I + p_{\bar{I}} dx^{\bar{I}} - x^{\bar{I}} dp_{\bar{I}} - p_{\bar{I}} dx^{\bar{I}} = p_I dx^I - x^{\bar{I}} dp_{\bar{I}},\end{aligned}$$

т. е. уравнение (1.6) удовлетворяется.

Функция  $x^{\bar{I}}(x^I p_{\bar{I}})$  однородна относительно переменных  $p_{\bar{I}}$  степени 0: действительно, равенство  $x^{\bar{I}} = x^I(x^{\bar{I}}, p_{\bar{I}})$  означает, что для некоторого  $\alpha$   $x^{\bar{I}} = x^{\bar{I}}(\alpha)$ ,  $x^I = x^I(\alpha)$ ,  $p_{\bar{I}} = p_{\bar{I}}(\alpha)$ , где  $x(\alpha)$ ,  $p(\alpha)$  — функции, задающие вложение  $i: U_I \rightarrow T_0^*(\mathbb{R}^n)$ . Полагая  $\beta = \lambda\alpha$  и пользуясь тем, что  $i$  — коническое отображение, получим  $x^{\bar{I}} = x^{\bar{I}}(\beta)$ ,  $x^I = x^I(\beta)$ ,  $\lambda p_{\bar{I}} = p_{\bar{I}}(\beta)$ , т. е.  $x^{\bar{I}}(x^I, p_{\bar{I}}) = x^{\bar{I}} = x^{\bar{I}}(x^I, \lambda p_{\bar{I}})$ . Лемма доказана.

В дальнейшем мы будем опускать подобные доказательства однородности различных функций.

Из первого условия квантования (1.3) следует, что функции  $S_I$  можно выбрать так, что в пересечениях карт  $U_I \cap U_J$  выполнены равенства

$$S_J - S_I = x^{I_2} p_{I_2} - x^{I_2} p_{I_2}, \quad (1.8)$$

где  $I_2$  и  $I_3$  — те же множества, что и в (1.5). Легко видеть, что построенные нами функции (1.7) как раз удовлетворяют этому условию:

$$-x^{\bar{J}} p_{\bar{J}} + x^{\bar{I}} p_{\bar{I}} = x^{\bar{I} \setminus \bar{J}} p_{\bar{I} \setminus \bar{J}} - x^{\bar{J} \setminus \bar{I}} p_{\bar{J} \setminus \bar{I}} = x^{I_2} p_{I_2} - x^{I_2} p_{I_2}.$$

Теперь мы можем определить гладкий канонический оператор на коническом лагранжевом погружении с мерой. Пусть  $\tilde{O}^l(L)$  — пространство гладких однородных порядка  $l$  функций  $f: L \rightarrow \mathbb{C}$  таких, что множество  $\pi(\text{supp } f)$ , где  $\pi: L \rightarrow L/\mathbb{R}_+$  — естественная проекция, компактно. Пусть  $O^l(L)$  — прямая сумма

$$O^l(L) = \bigoplus_{l' \leq l} \tilde{O}^{l'}(L),$$

$O^l(U_I)$  — пространство функций из  $O^l(L)$  с носителем в карте  $U_I$ . Пусть гладкая функция  $\chi(p)$  равна нулю при  $|p| \leq \varepsilon_1$  и единице при  $|p| \geq \varepsilon_2$ , где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — некоторые положительные числа,  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ .

**Определение 1.3.** Гладким элементарным каноническим оператором  $K_I$  в карте  $U_I$  называется оператор

$$K_I: O^l(U_I) \rightarrow D'(\mathbb{R}^n) \quad (1.9)$$



вида

$$K_I \varphi = F_{p_I \rightarrow x_I} \times \\ \times \left\{ \exp(i S_I(x^I, p_I)) \sqrt{\mu_I(x^I, p_I)} \varphi(x^I, p_I) \chi(p_I(x^I, p_I), p_I) \right\}. \quad (1.10)$$

Здесь  $F_{p_I \rightarrow x_I}$  — обратное преобразование Фурье:

$$F_{p_I \rightarrow x_I} f = (i/2\pi)^{I/2} \int \exp(ix^I p_I) f(p_I) dp_I.$$

Значение квадратного корня  $\sqrt{\mu_I(x^I, p_I)}$  однозначно зафиксировано выбором ветви аргумента  $\arg \mu_I$ .

**Лемма 1.5.** *Оператор (1.9) по модулю гладких функций не зависит от выбора функции  $\chi(p)$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\chi'(p)$  — другая функция, удовлетворяющая тем же условиям, что и  $\chi(p)$ . Тогда

$$K'_I \varphi - K_I \varphi = F_{p_I \rightarrow x_I} \left\{ \exp(i S_I(x^I, p_I)) \sqrt{\mu_I(x^I, p_I)} \times \right. \\ \left. \times \varphi(x^I, p_I) (\chi'(p_I, p_I) - \chi(p_I, p_I)) \right\}$$

— гладкая функция, так как  $\chi'(p_I, p_I) - \chi(p_I, p_I) = \chi'(p_I(x^I, p_I), p_I) - \chi(p_I(x^I, p_I), p_I)$  — финитная функция переменных  $p_I$ .

Следующие две теоремы устанавливают свойства операторов  $K_I$ .

**Теорема 1.6.** *Оператор  $K_I$  действует в пространствах*

$$K_I: O^l(U_I) \rightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$$

при  $s < -m/2 - l$  (напомним, что  $m$  — порядок однородности меры  $\mu$ ).

**Теорема 1.7.** *Коцепь  $\{K_I\}$  является коциклом по модулю элементов пространства  $H^{s+1}(\mathbb{R}^n)$  при  $s < -m/2 - l$ , т. е. для любой функции  $\varphi \in O^l(U_I \cap U_J)$*

$$K_I \varphi - K_J \varphi \in H^{s+1}(\mathbb{R}^n), \quad s < -m/2 - l. \quad (1.11)$$

Так как, очевидно, на многообразии  $L$  существует разбиение единицы  $\{e_I\}$ , однородное, порядка 0, и подчиненное каноническому покрытию, то стандартными рассуждениями получаем

*С л е д с т в и е.* Существует единственный оператор

$$K: O^l(L) \rightarrow H^s(R^n)/H^{s+1}(R^n), \quad s < -m/2 - l,$$

совпадающий с коцепью  $\{K_I\}$ . Он задается формулой

$$K\varphi = \sum_I K_I(e_I\varphi).$$

Оператор  $K$  называется *гладким каноническим оператором Маслова* на квантованном коническом лагранжевом погружении  $L$  с мерой  $\mu$ , а распределения вида  $K\varphi$  — *каноническими распределениями*.

*З а м е ч а н и е.* Как и в главе VI, используя операторы  $V_{I\bar{J}}$ , можно построить операторный коцикл  $K$  с точностью до распределения произвольной гладкости.

*Д о к а з а т е л ь с т в о* теоремы 1.6. Вычислим норму функции (1.10) в пространстве  $H^s(R^n)$ . Достаточно сделать это для случая, когда  $\varphi(x_I, p_{\bar{I}})$  — однородная функция порядка однородности  $k \leq l$ . Обозначим

$$a(x^I, p_{\bar{I}}) = \sqrt{\mu_I(x^I, p_{\bar{I}})} \varphi(x^I, p_{\bar{I}}) \chi(p_I(x^I, p_{\bar{I}}), p_{\bar{I}}).$$

Используя лемму 1.3, получаем, что при больших  $|p_{\bar{I}}|$   $a(x^I, p_{\bar{I}})$  — однородная функция переменных  $p_{\bar{I}}$  порядка  $k + \frac{m - |\bar{I}|}{2}$ . Преобразование Фурье функции  $K_I\varphi$  равно

$$(\tilde{K}_I\varphi)(p) = F_{x^I \rightarrow p_I} \{ \exp(iS(x_I, p_{\bar{I}})) a(x^I, p_{\bar{I}}) \}. \quad (1.12)$$

Рассмотрим выражение  $(1 + p^2)^{s/2} (\tilde{K}_I\varphi)(p)$ , где  $s \in \mathbb{R}$  — произвольное число. Представим  $s$  в виде  $s = 2N + s_1$ , где  $N$  — неотрицательное целое число, а  $s_1 \leq 0$ . Получим

$$\begin{aligned} (1 + p^2)^{s/2} (\tilde{K}_I\varphi)(p) &= \\ &= (1 + p^2)^{s_1/2} F_{x^I \rightarrow p_I} \left\{ \left( 1 - \frac{\partial^2}{\partial x_I^2} + p_I^2 \right)^N \exp(iS(x^I, p_{\bar{I}})) a(x^I, p_{\bar{I}}) \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + p^2)^{s_1/2} F_{x^I \rightarrow p_I} \left\{ \exp(iS(x^I, p_I)) \left( 1 - \left( \frac{\partial}{\partial x^I} + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + i \frac{\partial S}{\partial x^I}(x^I, p_I) \right)^2 + p_I^2 \right)^N a(x^I, p_I^*) \right\} = \\
&= (1 + p^2)^{s_1/2} F_{x^I \rightarrow p_I} \{ \exp(iS(x^I, p_I)) b(x^I, p_I) \}
\end{aligned}$$

где  $b(x^I, p_I)$  — конечная сумма гладких функций, финитных по переменным  $x^I$  и однородных по переменным  $p_I$ , порядок однородности которых не превышает числа  $l = k + (m - |\bar{I}|)/2 + 2N$ .

Вычислим норму функций  $K_{I\Phi}$  в пространстве  $H^s(\mathbb{R}^n)$ :

$$\begin{aligned}
\|K_{I\Phi}\|_s^2 &= \int (1 + p^2)^s |\tilde{K}_{I\Phi}(p)|^2 dp = \\
&= \int (1 + p^2)^{s_1} |F_{x^I \rightarrow p_I} \{ \exp(iS(x^I, p_I)) b(x^I, p_I) \}|^2 dp \leq \\
&\leq \int (1 + p_I^2)^{s_1} |F_{x^I \rightarrow p_I} \{ \exp(iS(x^I, p_I)) b(x^I, p_I) \}|^2 dp = \\
&= \int (1 + p_I^2)^{s_1} \exp\{i(S(x^I, p_I) - S(y^I, p_I) - x^I p_I + y^I p_I)\} \times \\
&\quad \times b(x^I, p_I) \bar{b}(y^I, p_I) dx^I dy^I dp_I dp_{\bar{I}} = \\
&= \int (1 + p_I^2)^{s_1} \exp\{i(S(x^I, p_I) - S(y^I, p_I))\} b(x^I, p_I) \times \\
&\quad \times \bar{b}(y^I, p_I) \delta(x^I - y^I) dx^I dy^I dp_{\bar{I}} = \\
&= \int (1 + p_I^2)^{s_1} |b(x^I, p_I)|^2 dx^I dp_{\bar{I}} \leq c \int (1 + p_I^2)^{s_1+t} dp_{\bar{I}}.
\end{aligned}$$

Последний интеграл сходится, если  $s_1 + t < |\bar{I}|/2$ , т. е. если  $s < -k - m/2 \leq -l - m/2$ . Теорема 1.6 доказана.

Доказательство теоремы 1.7. Пусть функция  $\varphi \in \mathcal{O}'(U_I \cap U_J)$ . Введем обозначения:

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in S^{n-1}, \quad \omega_k = \frac{p_k}{|p|}.$$

При больших  $|p|$  Фурье-преобразование (1.12) функций  $K_{I\Phi}$  и  $K_{J\Phi}$  может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_{I\Phi}(p) &= |p|^{\frac{l+m-n}{2}} (-i|p|/2\pi)^{|\bar{I}|/2} \times \\
&\times \int \exp\{i|p|(-x^I \omega_I + S_I(x^I, \omega_{\bar{I}}))\} \sqrt{\mu_I(x^I, \omega_{\bar{I}})} \varphi(x^I, \omega_{\bar{I}}) dx^I,
\end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_J \varphi(p) &= |p|^{\frac{l+m-n}{2}} (-i|p|/2\pi)^{|J|/2} \times \\ &\times \int \exp\{i|p|(-x^J \omega_J + S_J(x^J, \omega_J))\} \sqrt{\mu_J(x^J, \omega_J)} \varphi(x^J, \omega_J) dx^J. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Покажем, что при любом  $N$  для интеграла (1.13) имеет место асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} &|p|^{\frac{l+m-n}{2}} (-i|p|/2\pi)^{|J|/2} \int \exp\{i|p|(-x^J \omega_J + S_J(x^J, \omega_J))\} \times \\ &\quad \times \sqrt{\mu_J(x^J, \omega_J)} \varphi(x^J, \omega_J) dx^J = \\ &= |p|^{\frac{l+m-n}{2}} (-i|p|/2\pi)^{|J|/2} \left\{ \exp\{i|p|(-x^J \omega_J + S_J(x^J, \omega_J))\} \times \right. \\ &\quad \times \sum_{0 \leq k \leq N} \varphi_k(x^J, \omega_J) |p|^{-k} \Big\} dx^J + R_N(\omega, |p|). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь  $\varphi_k(x^J, \omega_J)$  — гладкие функции с носителем в карте  $U_J$ ,

$$\varphi_0(x^J, \omega_J) = \sqrt{\mu_J(x^J, \omega_J)} \varphi(x^J, \omega_J),$$

а  $R_N(\omega, |p|)$  — остаточный член разложения, удовлетворяющий неравенству

$$|R_N(\omega, |p|)| \leq C(1 + |p|)^{-N'}, \quad (1.16)$$

где  $N'$  — целое число, отличающееся от номера  $N$  на константу, не зависящую от параметров  $m, l$  и размерности пространства.

Из существования асимптотического разложения (1.15) вытекает утверждение теоремы 1.7. Действительно, первый член суммы (1.15) совпадает с (1.14), обратное преобразование Фурье остальных членов суммы представляет собой распределение вида  $K_J \varphi$ ,  $\varphi \in O^{l-1}(U_I \cap U_J)$ , и по теореме 1.6 принадлежит пространству  $H^{s+1}$ ,  $s < -m/2 - l$ . Наконец, при достаточно большом  $N$  обратное преобразование Фурье функции  $R_N(\omega, |p|)$  также принадлежит  $H^{s+1}$ .

**З а м е ч а н и е.** Из наших рассуждений следует, что на самом деле имеет место более тонкое утверждение, чем (1.11): разность  $K_I \varphi - K_J \varphi$  всегда может быть запи-

сана в виде  $K_J \varphi_1 + f$ , где  $\varphi_1 \in O^{l-1}(U_I \cap U_J)$ , а  $f$  — распределение произвольной наперед заданной гладкости. Хотя в формуле (1.15) параметры  $\omega = p/|p|$  связаны усло-

вием  $\sum_{i=1}^n \omega_i^2 = 1$ , т. е.  $\omega \in S^{n-1}$ , нам будет удобнее доказы-

вать соотношение (1.15) в более общем виде, считая, что параметры  $\omega_i$  независимы между собой. Получающаяся при этом оценка остаточного члена (1.16) будет локально равномерной относительно параметров  $\omega$ . Так как сфера  $S^{n-1}$  компактна, то для  $\omega \in S^{n-1}$  оценка будет равномерной.

Обозначая  $|p| = 1/h$ , мы видим, что разложение (1.15) представляет собой хорошо известную теорему о коцикличности канонического оператора в  $1/h$ -теории, изложенной в главе VI, причем  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  играют роль «физических» переменных, а  $(-x^1, \dots, -x^n)$  — роль двойственных к  $\omega$  импульсов. Таким образом, для доказательства существования разложения (1.15) — (1.16) достаточно проверить выполнение условий теоремы о коцикличности. Иными словами, нужно доказать, что

а) функции  $S(-\eta^I, y_I)$  и  $S_J(-\eta^J, y_J)$  определяют одно и то же лагранжево многообразие  $M$  в пространстве переменных  $(y, \eta)$ ;

б) эти функции согласованы, т. е.

$$S_I - S_J = y^I \eta_{I_1} - y^I \eta_{I_2}$$

(изменение знака по сравнению с (1.14) объясняется тем, что теперь множества  $I$  и  $\bar{I}$  поменялись ролями);

в) функции

$$(-1)^{|I|} \mu_I(-\eta^I, y_I) \text{ и } (-1)^{|J|} \mu_J(-\eta^J, y_J)$$

представляют собой плотности одной и той же меры  $\mu$  в координатах  $(y_I, \eta^I)$  и  $(y_J, \eta^J)$  соответственно, причем

$$\arg(-1)^{|I|} \mu_I - \arg(-1)^{|J|} \mu_J = \sum \arg \lambda_k + |I_3| \pi \pmod{4\pi}, \quad (1.17)$$

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg \lambda_k \leq \frac{\pi}{2} \quad (\arg(-1) = -\pi),$$

где  $\lambda_k$  — собственные значения матрицы

$$\frac{\partial(-\eta^{I_3}, y_{I_3})}{\partial(y_{I_3}, \eta^{I_3})}.$$

Проверка условий а), б), в) сводится к переписыванию формул (1.4), (1.5), (1.6), (1.8) в обозначениях  $x = -\eta$ ,  $p = y$ . Докажем, например, формулу (1.17) (это единственное, что может вызвать некоторые затруднения). Очевидно, матрица

$$\frac{\partial(\eta^{I_1}, y_{I_2})}{\partial(y_{I_1}, \eta^{I_2})} = \frac{\partial(x^{I_1}, p_{I_2})}{\partial(p_{I_1}, -x^{I_2})}$$

подобна матрице

$$\frac{\partial(-p_{I_2}, x^{I_1})}{\partial(x^{I_2}, p_{I_1})}.$$

Преобразование подобия осуществляется матрицей

$$C = \begin{matrix} I_2 & I_2 \\ I_1 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} I_2 \\ 0 \end{matrix} \begin{matrix} I_1 \\ -E \end{matrix}.$$

Поэтому она имеет те же самые собственные значения  $\lambda_k$ . Теперь (1.17) следует из (1.5), так как

$$\begin{aligned} \pi(-|I| + |J| + |I_2| - |I_3|) &= \\ &= \pi(-|I| + |J| + |I| - |I \cap J| - |J| + |I \cap J|) = 0. \end{aligned}$$

Теорема 1.7 доказана.

Перейдем к следующему важному понятию теории канонических распределений в  $R^n$  — понятию ассоциированности. Пусть  $\hat{H}$  — псевдодифференциальный оператор в  $R^n$  порядка  $r$  с вещественным главным символом  $H_r(x, p)$ ,  $K$  — гладкий канонический оператор на погружении  $L$  с мерой  $\mu$ .

**Определение 1.4.** Оператор  $K$  (и всякое каноническое распределение вида  $K\phi$ ) называется ассоциированным с псевдодифференциальным оператором  $\hat{H}$ , если выполнены следующие условия:

$$1^\circ. \quad i^* H_r = 0.$$

$$2^\circ. \quad \mathcal{L}_{V(H_r)} \mu = 0.$$

Здесь  $\mathcal{L}_{V(H_r)}$  — производная Ли вдоль векторного поля  $V(H_r)$ ,  $V(H_r)$  — гамильтоново векторное поле, порожденное символом  $H_r$ .

**Теорема 1.8.** Пусть  $K$  — гладкий канонический оператор на квантованном коническом лагранжевом погружении  $i: L \rightarrow T_0^* \mathbb{R}^n$  с мерой  $\mu$ ,  $H(x, p)$  — символ, старшая часть которого имеет степень однородности  $r$ . Тогда для любой функции  $\varphi \in O^l(L)$  имеет место формула коммутации

$$\hat{H}K\varphi \equiv K(i^*H_r)\varphi \pmod{H^{s-r+1}(\mathbb{R}^n)}, \quad s < l - m/2.$$

Если оператор  $K$ , кроме того, ассоциирован с символом  $H(x, p)$ , то

$$\hat{H}K\varphi \equiv K\mathcal{P}\varphi \pmod{H^{s-r+2}(\mathbb{R}^n)}, \quad s < -l - m/2, \quad (1.18)$$

где  $\mathcal{P}$  — оператор переноса,

$$\mathcal{P}\varphi = \left\{ \left( \frac{\partial H_r}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial H_r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p} \right) - \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 H_r}{\partial x^i \partial p_i} - iH_{r-1} \right\} \varphi.$$

**Доказательство.** Из теоремы 1.7 о коциклическости следует, что доказательство достаточно провести для случая, когда носитель функции  $\varphi$  сосредоточен целиком в одной канонической карте, т. е.

$$K\varphi = \int \exp \{ i(x^{\bar{I}} p_{\bar{I}} + S_I(x^I, p_{\bar{I}})) \} \sqrt{\mu_I(x^I, p_{\bar{I}})} \varphi(x^I, p_{\bar{I}}) dp_{\bar{I}}. \quad (1.19)$$

Очевидно также, что достаточно рассмотреть случай  $H(x, p) = H_r(x, p)$ . Применяя оператор  $\hat{H} = H\left(x, -i \frac{\partial}{\partial x}\right)$  к функции (1.19), получим

$$\begin{aligned} \hat{H}K\varphi = & \int \exp \{ i(x^{\bar{I}} p_{\bar{I}} + S_I(x^I, p_{\bar{I}})) \} H\left(x^I, \hat{x}^{\bar{I}} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial S_I}{\partial p_{\bar{I}}}, \hat{p}_I + \frac{\partial S_I}{\partial x^I}, p_{\bar{I}}\right) \{ \sqrt{\mu_I} \varphi(x^I, p_{\bar{I}}) \} dp_{\bar{I}}. \end{aligned}$$

Здесь  $\hat{p}_I = -i \frac{\partial}{\partial x^I}$ ,  $\hat{x}^{\bar{I}} = i \frac{\partial}{\partial p_{\bar{I}}}$ . Пусть  $\hat{L} = H\left(x^I, \hat{x}^{\bar{I}} - \frac{\partial S_I}{\partial p_{\bar{I}}}, \hat{p}_I + \frac{\partial S_I}{\partial x^I}, p_{\bar{I}}\right)$ ,  $a(x^I, p_I)$  — однородная функция

степени  $l$ . Пользуясь тем, что  $H$  — однородная функция степени  $r$ , можно представить  $\hat{L}a$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \hat{L}a(x^I, \lambda p_{\bar{I}}) &= H\left(x^I, \frac{i}{\lambda} \frac{\partial}{\partial p_{\bar{I}}} - \frac{\partial S_I}{\partial p_{\bar{I}}}(x^I, \lambda p_{\bar{I}}), -i \frac{\partial}{\partial x^I} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial S_I}{\partial x^I}(x^I, \lambda p_{\bar{I}}), \lambda p_{\bar{I}}\right) a(x^I, \lambda p_{\bar{I}}) = \\ &= \lambda^{l+r} H\left(x^I, \frac{i}{\lambda} \frac{\partial}{\partial p_{\bar{I}}} - \frac{\partial S_I}{\partial p_{\bar{I}}}(x^I, p_{\bar{I}}), -\frac{i}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^I} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial S_I}{\partial x^I}(x^I, \lambda p_{\bar{I}}), p_{\bar{I}}\right) a(x^I, p_{\bar{I}}), \quad \lambda > 0. \quad (1.20) \end{aligned}$$

Разлагая правую часть (1.20) по формулам для  $1/\hbar$ -псевдодифференциальных операторов, получаем

$$\begin{aligned} \hat{L}a(x^I, \lambda p_{\bar{I}}) &= \\ &= \lambda^{l+r} \sum_{k=0}^N \lambda^{-k} \tilde{H}_k\left(x^I, p_{\bar{I}}, -\frac{i}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^I}, \frac{i}{\lambda} \frac{\partial}{\partial p_{\bar{I}}}\right) a(x^I, p_{\bar{I}}) + \\ &\quad + R_N(x^I, p_{\bar{I}}, \lambda) \lambda^{-N-1+l+r}, \quad (1.21) \end{aligned}$$

причем функция  $R_N(x^I, p_{\bar{I}}, \lambda)$  ограничена вместе со всеми производными равномерно по  $\lambda \in (0, \infty)$ , если  $(x^I, p_{\bar{I}}) \in V$ , где  $V$  — произвольное компактное множество в  $\mathbf{R}^I \oplus \mathbf{R}_{\bar{I}}$ . Сделаем в формуле (1.21) замену  $\lambda p_{\bar{I}} = q_{\bar{I}}$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} \hat{L}a(x^I, q_{\bar{I}}) &= \lambda^{l+r} \sum_{k=0}^N \lambda^{-k} \tilde{H}_k\left(x^I, \frac{q_{\bar{I}}}{\lambda}, \frac{i}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^I}, \frac{i}{\lambda} \frac{\partial}{\partial p_{\bar{I}}}\right) \times \\ &\quad \times a\left(x^I, \frac{q_{\bar{I}}}{\lambda}\right) + R_N\left(x^I, \frac{q_{\bar{I}}}{\lambda}, \lambda\right) \lambda^{-N-1+l+r}. \end{aligned}$$

Полагая  $\lambda = |q_{\bar{I}}|$ , мы получаем, что при достаточно большом  $\lambda$  остаточный член в формуле (1.16) убывает как любая наперед заданная отрицательная степень  $|q_{\bar{I}}|$ . Отсюда следует, что для доказательства теоремы можно применить разложение (1.21) и, таким образом, теорема 1.8 вытекает из теоремы о коммутации в  $1/\hbar$ -теории (см. гл. VI).



**З а м е ч а н и е.** Из доказательства вытекает, что разложение (1.18) можно продолжить. Именно, для любой канонической карты  $U$ , имеет место равенство

$$\hat{H}K_{I\Phi} \equiv K\tilde{\mathcal{P}}_N^I\Phi \pmod{H^N(\mathbb{R}^n)},$$

где  $N$  сколь угодно велико, а  $\tilde{\mathcal{P}}_N^I$  — оператор, старший по однородности член которого совпадает с  $\mathcal{P}$ . Если воспользоваться формализмом операторов  $V_{IJ}$ , то из операторов  $\tilde{\mathcal{P}}_N^I$  можно «склеить» глобальный оператор переноса, удовлетворяющий соотношениям коммутации (1.18) с точностью  $\pmod{H^N(\mathbb{R}^n)}$ .

## § 7.2. Канонические распределения на многообразиях

В § 7.1 были определены канонические распределения в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . В этом параграфе мы дадим определение канонических распределений на произвольном многообразии  $M$ . Оказывается, что на многообразии удобнее работать не с собственно распределениями (функционалами на пространстве функций на многообразии), а с плотностями распределения порядка  $1/2$ , т. е. с функционалами на пространстве гладких плотностей порядка  $1/2$ . К определению этих объектов мы сейчас и перейдем.

**О п р е д е л е н и е 2.1.** *Плотностью порядка  $\alpha \in \mathbb{R}$  на многообразии  $M$  размерности  $n$  называется гладкое сечение одномерного расслоения  $\Omega_\alpha \rightarrow M$ , слоем которого над точкой  $x \in M$  является множество таких отображений*

$$\rho: \Lambda^n T_x M \rightarrow \mathbb{C},$$

что

$$\rho(\lambda \xi) = |\lambda|^\alpha \rho(\xi), \quad \xi \in \Lambda^n T_x M, \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Пусть  $U$  — координатная окрестность на многообразии  $M$  с координатами  $x_1, \dots, x_n$ , тогда сечение  $\rho \in \Gamma(\Omega_\alpha)$  определяет функцию

$$f_\rho: U \rightarrow \mathbb{C}$$

по формуле

$$f_\rho(x) = \rho\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^n}\right). \quad (2.2)$$

Если  $V$  — другая координатная окрестность на многообразии  $M$  с координатами  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ , то на пересечении  $U \cap V$  получаем

$$\begin{aligned}\tilde{f}_\rho(\tilde{x}(x)) &= \rho \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_n} \right) = \\ &= \rho \left( \left( \det \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right),\end{aligned}$$

или, пользуясь (2.1) и (2.2),

$$\tilde{f}_\rho(\tilde{x}(x)) = \left| \det \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} \right|^\alpha f_\rho(x). \quad (2.3)$$

Таким образом, плотность  $\rho$  порядка  $\alpha$  можно рассматривать как набор  $\{f_\rho\}$  функций, определенных в координатных окрестностях многообразия  $M$  и удовлетворяющих на пересечениях этих окрестностей условиям склейки (2.3).

Как легко видеть из равенства (2.3), плотности  $\rho \in \Gamma(\Omega_0)$  — это просто гладкие функции на  $M$ , плотности  $\rho \in \Gamma(\Omega_1)$  — гладкие меры на  $M$ . Действительно, если  $\rho \in \Gamma(\Omega_1)$ , то интеграл

$$\int_U f_\rho(x) dx, \quad U \subset M,$$

где функция  $f_\rho(x)$ , представляющая плотность  $\rho$  в локальной системе координат  $x_1, \dots, x_n$ , не зависит от выбора системы координат в окрестности  $U$  в силу равенства (2.3). Очевидно также, что если  $\rho_1$  — плотность порядка  $\alpha$ , а  $\rho_2$  — плотность порядка  $\beta$ , то  $\rho_1 \rho_2$  — плотность порядка  $\alpha + \beta$ . Естественно поэтому ввести следующее определение.

**О п р е д е л е н и е 2.2.** *Плотностью распределения порядка  $\alpha$  называется линейный непрерывный функционал на пространстве  $\Gamma_0(\Omega_{1-\alpha})$  финитных плотностей порядка  $1 - \alpha$  \*).*

Пространство плотностей распределений порядка  $\alpha$  обозначим через  $D_\alpha'(M)$ . Из предыдущих рассуждений

\*) Сходимость в  $\Gamma_0(\Omega_{1-\alpha})$  определяется точно так же, как и в  $D(\mathbb{R}^n)$ .

ясно, что имеет место вложение

$$\Gamma(\Omega_\alpha) \subset D'_\alpha(M).$$

Далее будет рассматриваться только случай  $\alpha = 1/2$ . Через  $H^s_{1/2}(M)$  обозначим множество таких плотностей  $\rho \in D'_{1/2}(M)$ , что для любой координатной окрестности  $U$  распределение  $f(x)$ , представляющее плотность  $\rho$ , принадлежит пространству  $H^s_{loc}(U)$ .

Пусть теперь  $M$  — гладкое многообразие размерности  $n$ ,  $T^*M$  — кокасательное расслоение на  $M$ . Как известно, формы  $\Omega$  и  $\omega$ , выражения для которых в локальной системе координат  $(x, p)$  есть соответственно  $\Omega = p dx$  и  $\omega = dp \wedge dx$ , представляют собой инвариантно определенные формы на  $T^*M$ . Поэтому точно так же, как и в § 7.1, можно определить квантованное коническое лагранжево погружение

$$i: L \rightarrow T^*M$$

с однородной мерой  $\mu$  степени  $m$ . Пусть  $(x_0, p_0) \in i(L)$ . Выберем на  $M$  некоторую систему координат  $x_1, \dots, x_n$  в окрестности  $U$  точки  $x_0$  и тем самым изоморфизм

$$\lambda: \pi^{-1}(U) \rightarrow T^*\mathbb{R}^n$$

(здесь  $\pi: T^*M \rightarrow M$  — естественная проекция). Применяя результаты предыдущего параграфа к погружению

$$j = \lambda \circ i: i^{-1}(\pi^{-1}(U)) \rightarrow T^*\mathbb{R}^n, \quad (2.4)$$

построим для каждой функции  $\varphi \in O^l(i^{-1}(\pi^{-1}(U)))$  распределение

$$K\varphi \in H^s(U), \quad s < -l - m/2,$$

где  $K$  — гладкий канонический оператор на вложении  $j$  (2.4). Если выбрать в  $U$  другую систему координат  $(y_1, \dots, y_n)$ , то получается другое погружение

$$\tilde{j}: i^{-1}(\pi^{-1}(U)) \rightarrow T^*\mathbb{R}^n,$$

другой гладкий канонический оператор  $\tilde{K}$  и другое распределение  $\tilde{K}\varphi \in H^s(U)$ .

Оказывается, однако, что имеет место следующая

**Теорема 2.1.** *Распределения  $[K\varphi](x)$  и  $[\tilde{K}\varphi](y)$  определяют по модулю  $H_{1/2}^{s+1}(U)$  один и тот же элемент пространства  $H_{1/2}^s(U)$ ,  $s < -l - m/2$ .*

Стандартная процедура, связанная с разбиением единицы, приводит к следующему следствию.

**Следствие.** *Пусть дано лагранжево погружение*

$$i: L \rightarrow T^*M$$

*с мерой  $\mu$ . Существует единственный оператор*

$$K: O^l(L) \rightarrow H_{1/2}^s(M)/H_{1/2}^{s+1}(M), \quad s < -l - m/2,$$

*совпадающий в любой локальной системе координат с соответствующим оператором вида (2.4).*

Элементы пространства  $H_{1/2}^s(M)$  вида  $K\varphi$  мы будем называть каноническими распределениями на многообразии  $M$ .

**Доказательство теоремы 2.1.** Мы должны доказать, что

$$[K\varphi](x) - [\tilde{K}\varphi](y) \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right|^{1/2} \in H^{s+1}(U).$$

Можно считать, что окрестность  $U \subset M$  достаточно мала, так что  $i^{-1}(\pi^{-1}(U))$  представляется в виде объединения  $i^{-1}(\pi^{-1}(U)) = \bigcup_k L_k$  непересекающихся множеств  $L_k$  и для всех  $k$  ограничение  $i|_{L_k}$  есть вложение. После этого каждое множество  $L_k$  можно рассматривать по отдельности. Для сокращения обозначений мы будем отождествлять  $L_k$  с подмногообразием  $i(L_k) \subset M$ , а индекс  $k$  будем опускать.

Без ограничения общности можно считать, что носитель функции  $\varphi$  лежит в малой конической окрестности точки  $(x_0, p_0)$ , так что

$$\begin{aligned} [K\varphi](x) &\equiv K_{I\varphi}(x) \pmod{H^{s+1}(U)}, \\ [\tilde{K}\varphi](y) &\equiv \tilde{K}_{J\varphi}(y) \pmod{H^{s+1}(U)}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Напомним, что  $(x_1, \dots, x_n) = x$ ,  $(y_1, \dots, y_n) = y$  — два различных набора координатных функций в  $U$ ,

$$K_I \varphi(x) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{|\bar{I}|/2} \int \exp \{i(x^{\bar{I}} p_{\bar{I}} + S_I(x^I, p_{\bar{I}}))\} \times \\ \times \sqrt{\mu_I(x^I, p_{\bar{I}})} \varphi(x^I, p_{\bar{I}}) dp_{\bar{I}}.$$

Можно считать, что матрица  $\frac{\partial^2 S_I}{\partial p_{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}}$  равна 0 в точке  $(x_0, p_0)$ . Действительно, если это не так, то в силу симметричности матрицы  $\frac{\partial^2 S_I}{\partial p_{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}}$  у нее имеется отличный от 0 главный минор  $\frac{\partial^2 S_I}{\partial p_{\kappa} \partial p_{\kappa}}$ ,  $\kappa \subset \bar{I}$ . Поскольку  $\frac{\partial S_I}{\partial p_{\kappa}} = x_{\kappa}$ , то уравнение

$$x_{\kappa} = \frac{\partial S_I}{\partial p_{\kappa}}(x^I, p_{\bar{I}})$$

разрешимо относительно  $p_{\kappa}$  в конической окрестности точки  $i^*(x_0, p_0)$ . Это означает, что  $(x^I, x_{\kappa}, p_{\bar{I} \setminus \kappa})$  можно выбрать в качестве локальных координат в этой окрестности и по теореме о коцикличности 1.7 можно записать

$$K_I \varphi(x) \equiv K_{I \cup \kappa} \varphi(x) \pmod{H^{s+1}}$$

( $I \cup \kappa$  обозначим снова через  $I$ ). Указанную процедуру будем продолжать до тех пор, пока равенство

$$\frac{\partial^2 S_I}{\partial p_{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}}(x^0, p_0) = 0$$

не будет выполнено. Обозначим

$$\Phi(x, p_{\bar{I}}) = x^{\bar{I}} p_{\bar{I}} + S_I(x^I, p_{\bar{I}}), \quad (2.6)$$

$$\Phi_1(y, p_{\bar{I}}) = \Phi(x(y), p_{\bar{I}}), \quad (2.7)$$

где  $x(y)$  — функции перехода от системы координат  $(x_1, \dots, x_n)$  к системе координат  $(y_1, \dots, y_n)$ . Очевидно,

$$\text{rang} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y \partial p_{\bar{I}}} = \text{rang} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial p_{\bar{I}}} = |\bar{I}|. \quad (2.8)$$

Изменяя, если потребуется, нумерацию переменных, получим, что в конической окрестности точки  $(x_0, p_0)$  из системы уравнений

$$\tilde{q}_{\bar{I}} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{\bar{I}}}(y, p_{\bar{I}}) \quad (2.9)$$

переменные  $p_{\bar{I}}$  можно выразить как функции от переменных  $y, \tilde{q}_{\bar{I}}$ :

$$p_{\bar{I}} = p_{\bar{I}}(y, \tilde{q}_{\bar{I}}). \quad (2.10)$$

Обозначим теперь

$$\tilde{\Phi}(y, \tilde{q}_{\bar{I}}) = \Phi_1(y, p_{\bar{I}}(y, \tilde{q}_{\bar{I}})). \quad (2.11)$$

**Лемма 2.2.** В области  $\pi^{-1}(U)$  с координатами  $(y^1, \dots, y^n, q_1, \dots, q_n)$  многообразие  $L$  определяется формулами

$$y^I = y^I, \quad y^{\bar{I}} = y^{\bar{I}}(y^I, \tilde{q}_{\bar{I}}), \quad q = q(y^I, \tilde{q}_{\bar{I}}).$$

Здесь  $(y^I, \tilde{q}_{\bar{I}})$  — координаты на  $L$ , функции  $y^{\bar{I}}(y^I, \tilde{q}_{\bar{I}})$  определяются из системы уравнений

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{q}_{\bar{I}}}(y^I, y^{\bar{I}}(y^I, \tilde{q}_{\bar{I}})) = 0, \quad (2.12)$$

а функции  $q_i(y^I, \tilde{q}_{\bar{I}})$  равны

$$q_i = q_i(y^I, \tilde{q}_{\bar{I}}) = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y_i}(y^I, y^{\bar{I}}(y^I, \tilde{q}_{\bar{I}}), q_{\bar{I}}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.13)$$

**Доказательство.** Пусть система уравнений (2.12) — (2.13) имеет решение. Обратимся сперва к уравнению (2.12). Учитывая (2.9) — (2.11), находим

$$0 = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{q}_{\bar{I}}} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial p_{\bar{I}}}{\partial \tilde{q}_{\bar{I}}} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_{\bar{I}}} \left( \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y_{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} \right)^{-1},$$

откуда

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial p_{\bar{I}}} (y, p_{\bar{I}} (y, \tilde{q}_{\bar{I}})) = 0. \quad (2.14)$$

Далее, из (2.16) следует, что  $\frac{\partial \Phi}{\partial p_{\bar{I}}} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_{\bar{I}}}$ , так что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_{\bar{I}}} (x (y), p_{\bar{I}} (y, \tilde{q}_{\bar{I}})) = 0, \quad (2.15)$$

т. е.

$$x^{\bar{I}} (y) + \frac{\partial S_I}{\partial p_{\bar{I}}} (x^I (y), p_{\bar{I}} (y, \tilde{q}_{\bar{I}})) = 0. \quad (2.16)$$

Из (2.16) и уравнения (1.6) для  $dS_I$  следует, что точка

$$(x^*, p^*) = \left( x (y), \frac{\partial S_I}{\partial x^I} (x^I (y), p_{\bar{I}} (y, \tilde{q}_{\bar{I}}), p_{\bar{I}} (y, \tilde{q}_{\bar{I}})) \right) \quad (2.17)$$

лежит на подмногообразии  $L$ . Переходя к координатам  $(y, q)$  по общей формуле замены координат в кокасательном расслоении, получаем, что координаты точки (2.17) равны

$$(y^*, q^*) = \left( y (x^*), p^* \frac{\partial x}{\partial y} (y (x^*)) \right) = \left( y, p^* \frac{\partial x}{\partial y} (y) \right)$$

(здесь  $y(x)$  — функция, обратная к функции  $x(y)$ ).

Имеем

$$p_I^* = \frac{\partial S_I}{\partial x^I} (x^I, p_{\bar{I}}) = \frac{\partial \Phi}{\partial x^I} (x, p_{\bar{I}}), \quad p_{\bar{I}}^* = \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\bar{I}}} (x, p_{\bar{I}}),$$

т. е.

$$p^* = \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (2.18)$$

Вычислим производную  $\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y}$ :

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial p_{\bar{I}}}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial p_{\bar{I}}}{\partial y}. \quad (2.19)$$

Учитывая (2.18) — (2.19) и (2.15), получаем

$$q = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} = p^* \frac{\partial x}{\partial y} = q^*,$$

т. е. точка  $(y, q)$  лежит на подмногообразии  $L$ . Обратно, пусть  $(y, q) \in L$ . Тогда, проводя все рассуждения в обратном порядке, мы легко получим, что величина  $\tilde{q}_I$ , определенная формулой (2.9), где

$$p_I = q \frac{\partial y}{\partial x_I}(x(y)),$$

является решением системы (2.12) — (2.13).

Осталось доказать, что функции  $(y^I, \tilde{q}_I)$  образуют систему координат на  $L$  в окрестности точки  $(x_0, p_0)$ . Для этого достаточно показать, что в точке  $(x_0, p_0)$  якобиан системы (2.12) — (2.13) по переменным  $(y_I, q)$  отличен от нуля:

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y_I \partial \tilde{q}_I} & 0 \\ \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y_I \partial y} & -E \end{vmatrix} = (-1)^n \det \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_I \partial \tilde{q}_I} \neq 0.$$

Действительно, из (2.6) — (2.11)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y_I \partial \tilde{q}_I} &= \frac{\partial}{\partial y_I} \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{q}_I} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial y_I} + \frac{\partial p_I}{\partial y_I} \frac{\partial}{\partial p_I} \right) \times \\ &\times \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_I} \left( \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y_I \partial p_I} \right)^{-1} \right) = E + \frac{\partial p_I}{\partial y_I} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial p_I \partial p_I} \left( \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y_I \partial p_I} \right)^{-1} + \\ &+ \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_I} \left( \frac{\partial}{\partial y_I} + \frac{\partial p_I}{\partial y_I} \frac{\partial}{\partial p_I} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y_I \partial p_I} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Так как  $(x_0, p_0) \in L$ , то в точке  $(x_0, p_0)$   $\frac{\partial \Phi_1}{\partial p_I} = 0$  (равенство (2.14)). Далее, в этой точке

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial p_I \partial p_I} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_I \partial p_I} = \frac{\partial^2 S_I}{\partial p_I \partial p_I} = 0. \quad (2.20)$$



Поэтому

$$\det \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^I \partial q_{\bar{I}}} (x_0, p_0) = 1. \quad (2.21)$$

Лемма доказана.

Таким образом, из системы уравнений (2.12) — (2.13) величины  $y^{\bar{I}}$  и  $q$  выражаются как функции

$$y^{\bar{I}} = y^{\bar{I}}(y^I, \tilde{q}_{\bar{I}}), \quad q = q(y^I, \tilde{q}_{\bar{I}}).$$

Л е м м а 2.3. *Имеет место равенство*

$$q_{\bar{I}}(y^I, \tilde{q}_{\bar{I}}) = \tilde{q}_{\bar{I}}.$$

Доказательство сводится к выкладке:

$$\begin{aligned} q_{\bar{I}}(y^I, \tilde{q}_{\bar{I}}) &= \frac{\partial \Phi}{\partial y^{\bar{I}}}(y, \tilde{q}_{\bar{I}}) = \\ &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial y^I}(y, p_{\bar{I}}) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_{\bar{I}}}(y, p_{\bar{I}}) \frac{\partial p_{\bar{I}}}{\partial y^{\bar{I}}} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y^{\bar{I}}}(y, p_{\bar{I}}) = \tilde{q}_{\bar{I}}, \end{aligned}$$

так как согласно (2.14)  $\frac{\partial \Phi_1}{\partial p_{\bar{I}}} = 0$  на многообразии  $L$ .

С л е д с т в и е. Многообразие  $L$  в координатах  $(y, q)$  задается системой уравнений

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial q_{\bar{I}}}(y, q_{\bar{I}}) = 0, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y^I}(y, q_{\bar{I}}) = q_I. \quad (2.23)$$

Итак, набор функций  $(y^I, q_{\bar{I}})$  образует систему локальных координат на  $L$  в конической окрестности точки  $(x_0, p_0)$ , поэтому можно считать, что в формуле (2.5)  $J = I$ , т. е.

$$\begin{aligned} [\tilde{K}_I \Phi](y) &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{|I|/2} \int \exp\{i(y^{\bar{I}} q_{\bar{I}} + \tilde{S}(y^I, q_{\bar{I}}))\} \times \\ &\quad \times \sqrt{\tilde{\mu}_I(y^I, q_{\bar{I}})} \varphi(y^I, q_{\bar{I}}) dq_{\bar{I}} (\text{mod } H^{s+1}(U)). \end{aligned}$$

Функция  $\tilde{S}$  удовлетворяет уравнению Пфаффа (1.6) с заменой  $x$  на  $y$ ,  $p$  на  $q$ .

Обозначим

$$\Psi(y, q_{\bar{I}}) = y^{\bar{I}} q_{\bar{I}} + \tilde{S}(y^I, q_{\bar{I}}).$$

Лемма 2.4. Существует набор функций  $Q_{\bar{I}}(y, q_{\bar{I}})$  такой, что

$$1^\circ. \quad \Psi(y, q_{\bar{I}}) = \tilde{\Phi}(y, Q_{\bar{I}}(y, q_{\bar{I}})).$$

$$2^\circ. \quad Q_{\bar{I}}(y^I, y^{\bar{I}}(y^I, q_{\bar{I}}), q_{\bar{I}}) = q_{\bar{I}}.$$

Доказательство. Из уравнения Пфаффа (1.6) для функции  $\tilde{S}$  следует, что для точек  $(y, q) \in L$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = q = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y}, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial q_{\bar{I}}} = 0 = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial q_{\bar{I}}}. \quad (2.25)$$

Поэтому разность  $\Psi(y, q_{\bar{I}}) - \tilde{\Phi}(y, q_{\bar{I}})$  является постоянной функцией на  $L$ , однородной, 1-го порядка, и, следовательно, равна нулю. Из (2.24), (2.25) вытекает, что  $\Psi(y, q_{\bar{I}}) - \tilde{\Phi}(y, q_{\bar{I}})$  имеет на  $L$  (т. е. в точках  $y^{\bar{I}} = y^{\bar{I}}(y^I, q_{\bar{I}})$ ) нуль 2-го порядка. Так как

$$\det \frac{\partial}{\partial y^{\bar{I}}} \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial q_{\bar{I}}} \right) = \det \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y^{\bar{I}} \partial q_{\bar{I}}} \neq 0$$

в окрестности точки  $(x_0, p_0)$  согласно (2.21) и  $\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial q_{\bar{I}}} = 0$  на подмногообразии  $L$ , то мы можем записать

$$\Psi(y, q_{\bar{I}}) - \tilde{\Phi}(y, q_{\bar{I}}) = \left( B(y, q_{\bar{I}}) \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial q_{\bar{I}}}, \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial q_{\bar{I}}} \right),$$

где  $B(y, q_{\bar{I}})$  — некоторая гладкая матричная функция. Функции  $Q_{\bar{I}}(y, q_{\bar{I}})$  будем искать в виде

$$Q_{\bar{I}}(y, q_{\bar{I}}) = q_{\bar{I}} + W(y, q_{\bar{I}}) \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial q_{\bar{I}}}. \quad (2.26)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Phi}(y, Q_I) - \Psi(y, q_I) &= \\
 &= \tilde{\Phi}(y, Q_I) - \tilde{\Phi}(y, q_I) + \tilde{\Phi}(y, q_I) - \Psi(y, q_I) = \\
 &= \tilde{\Phi}\left(y, q_I + W \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial q_I}\right) - \tilde{\Phi}(y, q_I) - \left(B(y, q_I) \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial q_I}, \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial q_I}\right) = \\
 &= \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial q_I}, W \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial q_I}\right) + \left(W \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial q_I}, C(y, q_I) W \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial q_I}\right) - \\
 &\quad - \left(B(y, q_I) \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial q_I}, \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial q_I}\right), \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

где  $C(y, q_I)$  — гладкая матричная функция.

В точке  $(x_0, p_0) \in L$

$$\begin{aligned}
 C(y, q_I) &= \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial q_I \partial q_I} = \frac{\partial}{\partial q_I} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_I}(y, p_I(y, q_I)) \frac{\partial p_I}{\partial q_I} \right) = \\
 &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_I} \frac{\partial p_I}{\partial q_I} + \frac{\partial p_I}{\partial q_I} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial p_I \partial p_I} \frac{\partial p_I}{\partial q_I} = 0 \quad (2.28)
 \end{aligned}$$

в силу равенств (2.14), (2.20). Приравнявая (2.27) нулю, получаем для матрицы  $W(y, q_I)$  уравнение

$$W + W^* C W = B.$$

Из (2.28) следует, что это уравнение разрешимо в конической окрестности точки  $(x_0, p_0)$ . Функции (2.26) удовлетворяют условиям 1° по построению и 2° в силу (2.22). Лемма 2.4 доказана.

Применим теперь распределение  $K_I \varphi$  к плотности  $f$ :

$$\begin{aligned}
 \langle K_I \varphi, f \rangle &= \int \exp \{i [(x^I p_I + S(x^I, p_I))] \} \times \\
 &\quad \times \sqrt{\mu_I(x^I, p_I)} \varphi(x^I, p_I) f(x^I, p_I) dp_I dx = \\
 &= \int \exp \{i [(y^I, q_I) + \tilde{S}(y^I, q_I)] \} \sqrt{\mu_I(x^I(y), p_I(y, q_I))} \times \\
 &\quad \times \varphi(x^I(y), p_I(y, q_I)) f(x^I(y), x^I(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right| \left| \frac{\partial p_I}{\partial q_I} \right| dq_I dy. \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

Заметим, что по модулю распределений меньшего порядка распределение  $K_{\text{тф}}$  зависит только от значений функций в стационарных точках, т. е. на многообразии  $L$ . Кроме того,

$$\mu_I(y^I, q_I) = \tilde{\mu}_I(y^I, q_I) \left| \frac{\partial(x^I, p_I)}{\partial(y^I, q_I)} \right|^{-1}.$$

Л е м м а 2.5.

$$\left| \frac{\partial(x^I, p_I)}{\partial(y^I, \tilde{q}_I)} \right| = \left| \frac{\partial p_I}{\partial q_I} \right|^2 \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right|.$$

Доказательство. Введем в фазовом пространстве координаты  $(x^I, p_I, \xi_I)$  и  $(y^I, q_I, \eta_I)$  с помощью формул

$$\begin{aligned} \xi_I &= \frac{\partial \Phi(x, p_I)}{\partial p_I} = x^I + \frac{\partial S_I(x^I, p_I)}{\partial p_I}, \\ \eta_I &= \frac{\partial \Phi(x(y), p_I(y, q_I))}{\partial q_I} = y^I + \frac{\partial S_I(y^I, q_I)}{\partial q_I}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\left| \frac{\partial(x^I, p_I, \xi_I)}{\partial(x^I, x^I, p_I)} \right| = \left| \frac{\partial(y^I, q_I, \eta_I)}{\partial(y^I, y^I, \tilde{q}_I)} \right| = 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 1 &= \left| \frac{\partial(x^I, p_I, \xi_I)}{\partial(x^I, x^I, p_I)} \right| = \left| \frac{\partial \left( x^I, p_I, \left( \frac{\partial p_I}{\partial \tilde{q}_I} \right)^{-1} \eta_I \right)}{\partial(x^I, x^I, p_I)} \right| = \\ &= \left| \frac{\partial p_I}{\partial q_I} \right|^{-1} \left| \frac{\partial(x^I, p_I, \eta_I)}{\partial(y^I, q_I, \eta_I)} \right| \left| \frac{\partial(y^I, q_I, \eta_I)}{\partial(y^I, y^I, q_I)} \right| \left| \frac{\partial(y^I, y^I, q_I)}{\partial(x^I, x^I, p_I)} \right| = \\ &= \left| \frac{\partial p_I}{\partial q_I} \right|^{-1} \left| \frac{\partial(x^I, p_I)}{\partial(y^I, q_I)} \right| \left| \frac{\partial q_I}{\partial p_I} \right| \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|. \end{aligned}$$

Лемма 2.5 доказана.

Подставляя полученное выражение в формулу (2.29) и заменяя в этом равенстве функцию  $f$  на  $\left| \frac{\partial x}{\partial y} \right|^{-1/2} f$ , получим

$$\begin{aligned} \langle K_I \varphi, f \rangle &\equiv \\ &\equiv \int \exp \{ i [ \langle y^I, q_I^I \rangle + S_I(y^I, q_I^I) ] \} \sqrt{\mu_{\beta I}(y^I, q_I^I)} \times \\ &\times \varphi(y^I, q_I^I) f(y^I, q_I^I) \left| \frac{\partial(x^I, p_I^I)}{\partial(y^I, q_I^I)} \right|^{-1/2} \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right|^{-1/2} \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial p_I^I}{\partial q_I^I} \right| dq_I^I dy = \\ &= \langle K_I \varphi, f \rangle. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

### § 7.3. Определение и примеры интегральных операторов Фурье

Пусть  $M, N$  и  $i: L \rightarrow T_0^*(M \times N)$  — гладкие многообразия и квантованное коническое лагранжево погружение с мерой  $\mu$ , однородной степени  $m$ ;  $K$  — гладкий канонический оператор на погружении  $i$ ; функция  $\varphi \in O^l(L)$ .

**О п р е д е л е н и е 3.1. Оператор**

$$\Phi: \Gamma_0(\Omega_{1/2}(M)) \rightarrow D'_{1/2}(N),$$

*задаваемый формулой*

$$[\Phi f](x) = \int_M [K\varphi](x, y) f(y) dy; \quad x \in N, y \in M, \quad (3.1)$$

*называется интегральным оператором Фурье, ассоциированным с погружением  $i$ . Функция  $\varphi$  называется символом оператора  $\Phi$ .*

**З а м е ч а н и е 1.** Мы рассматриваем операторы, действующие в пространствах плотностей порядка  $1/2$  на многообразиях; переход к операторам, действующим в пространствах функций, можно осуществить следующим образом. Так как расслоение  $\Omega_{1/2}$  тривиально, то существуют гладкие плотности  $\rho_M, \rho_N$  порядка  $1/2$  на многообразиях  $M, N$ , нигде не равные нулю. Используя эти

плотности, мы можем по оператору  $\Phi$  построить оператор

$$\tilde{\Phi} = \rho_N^{-1} \circ \Phi \circ \rho_M,$$

который действует из пространства  $C_0^\infty(M)$  в пространство  $D'(N) \equiv D'_0(N)$ . Аналогично строятся операторы в пространствах плотностей произвольного порядка  $\alpha$ .

**Теорема 3.1.** *Интегральный оператор (3.1) является непрерывным оператором из пространства  $H_{1/2}^s(M)$  в пространство  $H_{1/2}^s(N)$  при  $s > l + m/2$ .*

**Доказательство.** По теореме 1.1  $K\Phi \in H_{1/2}^s(M \times N)$ . Поэтому утверждение теоремы 3.1 следует из теоремы о двойственности пространств Соболева.

**Замечание 2.** В § 7.5 будет показано, что утверждение теоремы 3.1 может быть значительно усилено, если погружение  $i$  удовлетворяет некоторым дополнительным условиям.

Приведем теперь несколько примеров операторов, которые являются интегральными операторами Фурье.

**Пример 1.** *Классические псевдодифференциальные операторы на многообразии  $M$ .* В локальной системе координат  $(x^1, \dots, x^n)$ ,  $n = \dim M$ , любой псевдодифференциальный оператор  $A$  может быть записан в виде

$$[Af](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \exp(i \langle \xi, x - y \rangle) a(x, \xi) f(y) d\xi dy, \quad (3.2)$$

где  $a(x, \xi)$  — асимптотически однородная некоторого порядка  $m$  по переменным  $\xi$  функция, называемая символом оператора  $A$ . Из (3.2) следует, что оператор  $A$  представляет собой интегральный оператор с ядром

$$A(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \exp(i \langle \xi, x - y \rangle) a(x, \xi) d\xi.$$

Обозначим через  $(x^1, \dots, x^n, \xi_1, \dots, \xi_n, y^1, \dots, y^n, \eta_1, \dots, \eta_n)$  координаты в  $T^*(M \times M) \cong T^*M \times T^*M$  и зададим лагранжево вложение  $i: L \rightarrow T^*(M \times M)$  уравнениями

$$x = y, \quad \xi = -\eta.$$

Поскольку подмногообразие  $L$  диффеоморфно пространству  $T^*M$ , то в качестве локальной системы координат на

многообразии  $L$  можно взять координаты  $(x^1, \dots, x^n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ . Зададим на многообразии  $L$  меру  $\mu$  формулой

$$\mu = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n.$$

Пусть  $K$  — гладкий канонический оператор на погружении  $i$ . Тогда имеет место равенство

$$A(x, y) = [Ka](x, y).$$

Хорошо известно, что оператор

$$A: H_{1/2}^s(M) \rightarrow H_{1/2}^{s-r}(M)$$

непрерывен при любом  $s$ . В § 7.5 мы докажем, что точно таким же свойством обладает любой интегральный оператор Фурье, ассоциированный с погружением  $i$ , которое удовлетворяет следующему условию.

**О п р е д е л е н и е 3.2.** *Коническое лагранжево погружение*

$$i: L \rightarrow T^*(M \times N)$$

называется неособым, если: 1)  $\dim M = \dim N$ , 2) для любой достаточной малой конической окрестности  $V \subset L$  подмногообразие  $i(V) \subset T^*(M \times N)$  диффеоморфно проецируется на  $T^*M$ .

**П р и м е р 2.** *Операторы ограничения и коограничения.* Пусть  $M$  — гладкое многообразие размерности  $n$ ,  $i: N \hookrightarrow M$  — гладкое подмногообразие коразмерности  $\nu$ . Тогда определены оператор ограничения

$$i_*: H_0^s(M) \rightarrow H_0^{s-\nu/2}(N), \quad s > \nu/2, \quad (3.3)$$

сопоставляющий каждой функции  $f \in H_0^s(M)$  ее ограничение на подмногообразии  $N$ , и оператор коограничения

$$i_*: H_1^s(N) \rightarrow H_1^{s-\nu/2}(M), \quad s < 0, \quad (3.4)$$

сопряженный к оператору (3.3). Запишем операторы (3.3), (3.4) в локальной системе координат  $(x^1, \dots, x^n)$  на  $M$  (глобализация результата может быть произведена с учетом замечания 1). Пусть многообразие  $N$  в системе координат  $(x^1, \dots, x^n)$  описывается уравнениями  $x_1^{n-\nu+1} = x^{n-\nu+2} = \dots = x^n = 0$ . Обозначим  $x' = (x^1, \dots, x^{n-\nu})$ ,  $x'' = (x^{n-\nu+1}, \dots, x^n)$ ,  $x = (x', x'')$ . Операторы (3.3) и (3.4)

действуют следующим образом:

$$[i^*f](x') = 1/(2\pi)^{n/2} \int \exp \{i[\langle \eta', x' - y' \rangle - \langle \eta'', y'' \rangle]\} \times \\ \times f(y', y'') dy' dy'' d\eta' d\eta'', \quad (3.5).$$

$$[i_*f](y', y'') = 1/(2\pi)^{n/2} \int \exp \{i[\langle \eta', x' - y' \rangle + \langle \eta'', y'' \rangle]\} \times \\ \times f(x') dx' d\eta' d\eta''. \quad (3.6)$$

Введем в  $T^*(M \times N) \cong T^*M \times T^*N$  координаты  $(y, \eta, x', \xi')$ ,  $(y, \eta) \in T^*M$ ,  $(x', \xi') \in T^*N$ . Операторы (3.5) и (3.6) являются интегральными операторами Фурье, ассоциированными с лагранжевым вложением  $i: L \rightarrow T^*(M \times N)$ , задаваемыми уравнениями

$$y'' = 0, \quad x' = y', \quad \eta' = -\xi'. \quad (3.7)$$

Лагранжево погружение (3.7) не является неособым, и в соответствии с этим операторы (3.3) и (3.4) не являются непрерывными операторами в шкале  $\{H^s\}$ .

#### § 7.4. Регуляризация задачи Коши

В этом параграфе мы применим развитую нами технику для построения асимптотического решения задачи Коши. Пусть  $M$  — гладкое многообразие размерности  $n$ .

Рассмотрим следующую задачу:

$$-i \frac{\partial u}{\partial t} + H\left(t, x, -i \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0, \quad (4.1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (4.2)$$

Здесь  $H\left(t, x, -i \frac{\partial}{\partial x}\right)$  — псевдодифференциальный оператор 1-го порядка на многообразии  $M$  с вещественным главным символом  $H_1$ ,  $u_0(x)$  — заданная плотность распределения порядка  $1/2$  на многообразии  $M$ . Задача (4.1) — (4.2) является частным случаем более общей задачи

$$-i \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} + H\left(t, x, -i \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi(t) = 0, \quad (4.3)$$

$$\Phi(0) = \Phi_0, \quad (4.4)$$



где при каждом фиксированном  $t$

$$\Phi_t'(t): \Gamma_0(\mathcal{Q}_{1/2}(M)) \rightarrow D_{1/2}'(M)$$

— интегральный оператор Фурье на  $M$ . Действительно, для решения задачи (4.1) — (4.2) достаточно в качестве  $\Phi_0$  взять тождественный оператор и положить

$$u(x, t) = \Phi(t) u_0(x).$$

Займемся решением задачи (4.3) — (4.4). Пусть ядро оператора  $\Phi_0$  имеет вид  $[K\varphi](x, y)$ ,  $x, y \in M$ , где  $K$  — гладкий канонический оператор на квантованном коническом лагранжевом погружении  $i: L \rightarrow T_0^*(M \times M)$  с мерой  $\mu$ ,  $\dim L = n$ ,  $\varphi \in O^l(L)$ . Обозначим координаты в  $T_0^*(M \times M)$  через

$$(x, p, y, \xi) = (x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n, y^1, \dots, y^n, \xi_1, \dots, \xi_n).$$

Пусть вложение  $i$  задается однородными степеней 1 и 0 функциями переменной  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ :

$$x = x(\alpha), p = p(\alpha), y = y(\alpha), \xi = \xi(\alpha).$$

Построим лагранжево вложение

$$j: L \times \mathbb{R}_t^1 \rightarrow T^*(M \times M \times \mathbb{R}_t^1).$$

Рассмотрим систему Гамильтона

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad (4.5)$$

$$\frac{dx(\alpha, \tau)}{d\tau} = H_{1p}(\tau, x(\alpha, \tau), p(\alpha, \tau)), \quad (4.6)$$

$$\frac{dp(\alpha, \tau)}{d\tau} = -H_{1x}(\tau, x(\alpha, \tau), p(\alpha, \tau)), \quad (4.7)$$

$$t|_{\tau=0} = 0, \quad x|_{\tau=0} = x(\alpha), \quad p|_{\tau=0} = p(\alpha).$$

Очевидно, ее решение

$$x(\alpha, \tau), \quad p(\alpha, \tau), \quad t(\tau) = \tau$$

есть функция от  $\alpha$  нужной степени однородности, и поэтому функции

$$\begin{aligned} x(\alpha, \tau), \quad p(\alpha, \tau), \quad y(\tau) \equiv y(\alpha), \quad \xi(\alpha, \tau) \equiv \xi(\alpha), \\ t(\tau) \equiv \tau, \quad E(\tau) = -H(\tau, x(\alpha, \tau), p(\alpha, \tau)) \end{aligned} \quad (4.8)$$

задают коническое квантованное лагранжево погружение

$$j: L \times \mathbf{R}_\tau^1 \rightarrow T^*(M \times M \times \mathbf{R}^1)$$

(через  $E$  обозначена переменная, двойственная к  $t$ ). Мера  $\mu$  на многообразии  $L \times \mathbf{R}_\tau^1$  задается следующим образом:

$$\mu(\alpha, \tau) = \mu(\alpha) \wedge d\tau. \quad (4.9)$$

Очевидно, что погружение  $j$  с мерой  $\mu$  ассоциировано с символом  $\mathcal{H}(x, p, y, \xi, E, t) = E + H_1(x, p)$ . Действительно, гамильтоново векторное поле  $V_{\mathcal{H}}$  символа  $\mathcal{H}$  задается формулами (4.5)–(4.7), мера  $\mu$  инвариантна относительно поля  $V_{\mathcal{H}}$  в силу (4.9),  $j^*\mathcal{H} = 0$ , что следует из явного вида (4.8) функций, задающих вложение.

Пусть  $K_1$  — гладкий канонический оператор на вложении  $j$  с мерой  $\mu$ . Положим  $\Phi(x, y, t) = [K_1\Phi](x, y, t)$ . Применяя теорему 1.3 о коммутации, мы видим, что для того, чтобы решить задачу (4.3)–(4.4) с точностью до оператора с ядром  $[K_1\Phi](x, y, t)$ ,  $\phi_1 \in O^{l-1}(L \times \mathbf{R}_\tau^1)$ , достаточно решить уравнение переноса

$$\mathcal{P}\Phi(\alpha, \tau) = 0 \quad (4.10)$$

с начальным условием

$$\Phi(\alpha, 0) = \varphi(\alpha). \quad (4.11)$$

Оператор переноса в координатах  $(\alpha, \tau)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = \frac{d}{d\tau} - \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^i \partial p_i}(\tau, x(\alpha, \tau), p(\alpha, \tau)) - \\ - iH_0(\tau, x(\alpha, \tau), p(\alpha, \tau)), \end{aligned}$$

поэтому решение задачи (4.10)–(4.11) имеет вид

$$\Phi(\alpha, \tau) = \varphi(\alpha) \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\tau \left( \sum_i \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^i \partial p_i} + iH_0 \right) d\tau \right\}.$$

Для того чтобы получить в правой части (4.3) оператор со сколь угодно гладким ядром  $A(x, y) \in H^N$ , необходимо решить уравнение

$$\tilde{\mathcal{P}}^N \varphi(\alpha, \tau) = 0, \quad (4.12)$$

где старший член оператора  $\tilde{\mathcal{P}}^N$  совпадает с  $\mathcal{P}$  (см. § 7.1).

Каноническая система координат на  $L \times \mathbb{R}_t^1$  в окрестности любой точки может быть выбрана так, чтобы переменная  $t$  входила в число локальных координат. Тогда при каждом фиксированном  $t$  оператор  $\Phi(t)$  представляет собой интегральный оператор Фурье на многообразии  $M$ . Ядро оператора  $\Phi(t)$  имеет вид

$$\gamma_t[K_t \varphi_t](x, y),$$

где  $K_t$  — гладкий канонический оператор на вложении  $i_t$ , задаваемом функциями

$$x_t(\alpha) = x(\alpha, t), \quad p_t(\alpha) = p(\alpha, t),$$

$$y_t(\alpha) = y(\alpha), \quad \xi_t(\alpha) = \xi(\alpha)$$

с мерой  $\mu = \mu(\alpha)$ , функция  $\varphi_t$  задается формулой

$$\varphi_t(\alpha) = \varphi(\alpha, t),$$

$\gamma_t$  — комплексное число,  $|\gamma_t| = 1$ , зависящее от выбора аргумента плотности меры на вложении  $i_t$ .

Итак, доказана следующая

**Т е о р е м а 4.1.** Пусть

$$j: L \times \mathbb{R}_t^1 \rightarrow T_0^*(M \times M \times \mathbb{R}_t^1)$$

— лагранжево вложение, задаваемое формулами (4.8), функция  $\varphi(\alpha, \tau)$  удовлетворяет уравнению переноса (4.12). Тогда оператор  $\Phi(t)$  с ядром  $[K\varphi](x, y, t)$  удовлетворяет уравнению

$$-i \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} + \hat{H} \Phi(t) = A(t)$$

и начальному условию (4.4). Здесь  $A(t)$  — интегральный оператор с ядром  $A(x, y, t) \in H_{1/2}^N(M \times M)$ .

**З а м е ч а н и е.** Из результатов § 7.5 будет следовать, что для построения регуляризатора задачи (4.1) — (4.2) достаточно ограничиться старшим членом решения уравнения переноса.

### § 7.5. Теоремы об ограниченности и о композиции интегральных операторов Фурье

В этом параграфе мы займемся изучением интегральных операторов Фурье, ассоциированных с неособыми в смысле определения 3.2 коническими лагранжевыми погружениями. При этом, чтобы чрезмерно не загромождать изложения, мы ограничимся изучением операторов, связанных с каноническими преобразованиями.

Пусть  $M, N$  — гладкие многообразия одинаковой размерности  $n$ ,  $g: T_0^*M \rightarrow T_0^*N$  — коническое каноническое преобразование (т. е. гладкое отображение, перестановочное с действием группы  $\mathbf{R}_+$  и удовлетворяющее условию  $g^*\omega_N = \omega_M$ , где  $\omega_N, \omega_M$  — канонические 2-формы на  $T_0^*N$  и  $T_0^*M$  соответственно). Каноническое преобразование  $g$  индуцирует неособое коническое лагранжево вложение  $i_g: T_0^*M \rightarrow T_0^*(M \times N)$ :

$$(y, \xi) \mapsto (y, \xi, x(y, \xi), -p(y, \xi));$$

здесь  $(y, \xi)$  — координаты в  $T_0^*M$ ,  $(x, p)$  — координаты в  $T_0^*N$ ,  $x(y, \xi), p(y, \xi)$  — функции, задающие каноническое преобразование  $g$ . На  $T_0^*M$  имеется естественная мера

$$\mu = dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n \wedge d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n \quad (5.1)$$

(фазовый объем). Как известно, мера (5.1) не зависит от выбора системы координат  $(y^1, \dots, y^n)$  на  $M$ . Мы будем предполагать, что лагранжево вложение  $i_g$  является квантованным.

**Определение 5.1.** Пусть функция  $\varphi \in O^1(T_0^*M)$ . Интегральным оператором Фурье с символом  $\varphi$ , ассоциированным с каноническим преобразованием  $g$ , называется интегральный оператор

$$T(g, \varphi): \Gamma_0(\Omega_{1/2}(M)) \rightarrow D'_{1/2}(N)$$

с ядром

$$K(x, y) = [K\varphi](x, y),$$

где  $K$  — гладкий канонический оператор на вложении  $i_g$  с мерой (5.1).

**З а м е ч а н и е.** Оператор  $T(g, \varphi)$  определен с точностью до множителя, зависящего от выбора аргумента у плотности меры  $\mu$ .

Операторы Фурье, ассоциированные с каноническими преобразованиями, обладают некоторыми замечательными свойствами, описанными в двух следующих теоремах.

**Теорема 5.1.** Пусть  $g: T_0^*M \rightarrow T_0^*N$  — коническое каноническое преобразование,  $\varphi \in O^l(T_0^*M)$ . Тогда оператор  $T(g, \varphi)$  продолжается до непрерывного оператора

$$T(g, \varphi): H_{1/2}^s(M) \rightarrow H_{1/2}^{s-l}(N), \quad -\infty < s < \infty,$$

в частности

$$T(g, \varphi): \Gamma(\Omega_{1/2}(M)) \rightarrow \Gamma(\Omega_{1/2}(N)).$$

**Теорема 5.2.** Пусть  $g_1: T_0^*(M) \rightarrow T_0^*(N)$ ,  $g_2: T_0^*N \rightarrow T_0^*Y$  — конические канонические преобразования,  $\varphi_1 \in O^{l_1}(T_0^*M)$ ,  $\varphi_2 \in O^{l_2}(T_0^*N)$ . Тогда имеет место следующая формула композиции:

$$T(g_2, \varphi_2) \circ T(g_1, \varphi_1) = \gamma T(g_2 \circ g_1, (g_1^* \varphi_2) \varphi_1 + \psi) + R.$$

Здесь  $\psi \in O^{l_1+l_2-1}(T_0^*M)$  — некоторая функция,  $R$  — оператор с гладким ядром,  $\gamma$  — число, по модулю равное 1, которое зависит от выбора аргумента у плотностей мер на вложениях  $i_{g_1}, i_{g_2}, i_{g_2 \circ g_1}$ .

Доказательства теорем 5.1 и 5.2 опираются на следующие две теоремы (теоремы 5.3 и 5.4).

**Теорема 5.3.** Пусть  $g$  — локальное коническое каноническое преобразование конической области  $V \subset T_0^*\mathbb{R}^n$  в  $T_0^*\mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \in V$  — произвольная точка. Существуют коническая окрестность  $W \subset V$  точки  $\alpha$  и гладкое однопараметрическое семейство  $\{g_t\}_{t \in [0, 1]}$  локальных конических канонических преобразований окрестности  $W$  такие, что

$$1^\circ. g_1 = g|_W.$$

2°.  $g_0$  — тождественный диффеоморфизм области  $W$ , либо диффеоморфизм, задаваемый следующими формулами:

$$g_0(x^1) = -x^1, \quad g_0(x^i) = x^i, \quad i = 2, 3, \dots, n;$$

$$g_0(p_1) = -p_1, \quad g_0(p_i) = p_i, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

В этих формулах  $(x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$  — стандартные координаты в кокасательном расслоении  $T^*\mathbf{R}^n$ .

Доказательство. Будем пользоваться следующими обозначениями:  $(y, \xi) = (y^1, \dots, y^n, \xi_1, \dots, \xi_n)$  — координаты в  $T_0^*\mathbf{R}^n \supset V$ ,  $(x, p) = (x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$  — координаты в  $T_0^*\mathbf{R}^n \supset g(V)$ . Пусть  $(y_0, \xi_0)$  — координаты точки  $\alpha$ ,  $(x_0, p_0)$  — координаты точки  $g(\alpha)$ . Существуют набор индексов  $I \subset \{n\}$  и однородная 1-го порядка по  $p_{\bar{I}}, \xi$  функция  $S(x^I, p_{\bar{I}}, \xi)$ , определенная в конической (по  $p_{\bar{I}}, \xi$ ) окрестности точки  $(x_0^I, p_{0\bar{I}}, \xi_0)$ , такая, что

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial x^I \partial \xi} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial p_{\bar{I}} \partial \xi} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Каноническое преобразование  $g$  в конической окрестности точки  $(y_0, \xi_0)$  определяется уравнениями

$$y = \frac{\partial S}{\partial \xi}(x^I, p_{\bar{I}}, \xi), \quad p = \frac{\partial S}{\partial x^I}(x^I, p_{\bar{I}}, \xi), \quad x^{\bar{I}} = -\frac{\partial S}{\partial p_{\bar{I}}}(x^I, p_{\bar{I}}, \xi). \quad (5.2)$$

Таким образом,  $S(x^I, p_{\bar{I}}, \xi)$  — производящая функция преобразования  $g$ . Прежде всего промотопируем преобразование  $g$  к такому преобразованию  $g_1$ , которое (возможно, в меньшей конической окрестности точки  $(y_0, \xi_0)$ ) может быть задано с помощью производящей функции  $S_1(x, \xi)$  (т. е. набор индексов  $\bar{I}$  пуст). Так как  $\xi_0 \neq 0$ , то существует такая матрица  $C$  с вещественными элементами размера  $|\bar{I}| \times n$ , что

$$p_{0\bar{I}} = C\xi_0. \quad (5.3)$$

Положим

$$\tilde{S}(t) = \tilde{S}(x^I, p_{\bar{I}}, \xi, t) = S(x^I, p_{\bar{I}}, \xi) + t \frac{(p_{\bar{I}} - C\xi)^2}{|\xi|}. \quad (5.4)$$

Существует такое число  $t_0 > 0$ , что при  $0 \leq t \leq t_0$

$$\det \left\| \frac{\frac{\partial^2 \tilde{S}(x_0^I, p_{0\bar{I}}, \xi_0, t)}{\partial x^I \partial \xi}}{\frac{\partial^2 \tilde{S}(x_0^I, p_{0\bar{I}}, \xi_0, t)}{\partial p_{\bar{I}} \partial \xi}} \right\| \neq 0, \quad (5.5)$$

а при  $t = t_0$

$$\begin{aligned} \det \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} (x_0^I, p_{0\bar{I}}, \xi_0, t) \right\| = \\ = \det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial p_{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} (x_0^I, p_{0\bar{I}}, \xi_0) + \frac{t_0}{|\xi_0|} E \right\| \neq 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Равенство (5.5) означает, что функция  $\tilde{S}(t)$  является производящей функцией некоторого локального конического канонического преобразования  $g_t$ , определенного в конической окрестности точки

$$\left( \frac{\partial \tilde{S}(x_0^I, p_{0\bar{I}}, \xi_0, t)}{\partial \xi}, \xi_0 \right) = (y_0, \xi_0)$$

и такого, что  $g_t(y_0, \xi_0) = (x_0, p_0)$  (последние равенства следуют из (5.2), (5.3), (5.4)). Из (5.6) следует, что уравнение

$$x_{\bar{I}}^{\bar{I}} = - \frac{\partial \tilde{S}}{\partial p_{\bar{I}}} (x^I, p_{\bar{I}}, \xi, t_0) \quad (5.7)$$

разрешимо относительно переменных  $p_{\bar{I}}$  в конической (по  $p_{\bar{I}}, \xi$ ) окрестности точки

$$(x_0^I, x_0^{\bar{I}}, p_{0\bar{I}}, \xi_0, t_0).$$

Таким образом, из (5.7) можно выразить  $p_{\bar{I}}$  как функцию

$$p_{\bar{I}} = p_{\bar{I}}(x, \xi).$$

Это означает, что набор функций  $(x, \xi)$  образует систему локальных координат на графике диффеоморфизма  $g_{t_0} \equiv g_1$  в конической окрестности точки  $(y_0, \xi_0)$ . Отсюда

следует, что каноническое преобразование  $g_1$  в конической окрестности точки  $(y_0, \xi_0)$  может быть задано производящей функцией  $S_1(x, \xi)$ , определенной в конической окрестности точки  $(x_0, \xi_0)$ ,  $\det \|\partial^2 S_1 / \partial x \partial \xi\| \neq 0$ , в этой окрестности.

Прогомотопируем теперь преобразование  $g_1$  к линейному каноническому преобразованию. Так как матрица

$$A = \frac{\partial^2 S_1}{\partial x \partial \xi}(x_0, \xi_0)$$

невырождена, то существует такой вектор  $v \in \mathbb{R}^n$ , что

$$y_0 = A^t(x_0 + v).$$

Положим

$$\tilde{S}_1(x, \xi, t) = S_1(x_0, \xi_0)(1-t) + \langle x + v, A\xi \rangle \cdot t.$$

Функция  $\tilde{S}_1(x, \xi, t)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 \tilde{S}_1}{\partial x \partial \xi}(x_0, \xi_0, t) \right\| = \det \left\| (1-t) \frac{\partial^2 S_1}{\partial x \partial \xi}(x_0, \xi_0) + tA \right\|,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial x}(x_0, \xi_0, t) &= (1-t) \frac{\partial S_1}{\partial x}(x_0, \xi_0) + tA\xi_0 = \\ &= (1-t) \frac{\partial S_1}{\partial x}(x_0, \xi_0) + t \frac{\partial^2 S_1(x_0, \xi_0)}{\partial x \partial \xi} \xi_0 = \frac{\partial S_1}{\partial x}(x_0, \xi_0) = p_0. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тождеством Эйлера для однородных функций

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial \xi}(x_0, \xi_0, t) &= (1-t) \frac{\partial S_1}{\partial \xi}(x_0, \xi_0) + tA^t(x_0 + v) = \\ &= (1-t)y_0 + ty_0 = y_0. \end{aligned}$$

Поэтому функция  $\tilde{S}_1(x, \xi, t)$  является производящей функцией семейства  $\{\tilde{g}_1(t)\}$ ,  $t \in [0, 1]$ , локальных однородных канонических преобразований, определенных в окрестности точки  $(y_0, \xi_0)$ , причем  $\tilde{g}_1(0) = g_1$ ,  $\tilde{g}_1(1) \equiv g_2$  — линейное каноническое преобразование, задаваемое производящей функцией

$$S_2(x, \xi) = \langle x + v, A\xi \rangle.$$

Так как группа  $GL(n, \mathbb{R})$  имеет две компоненты связности, то существует гладкое отображение  $A: [0, 1] \rightarrow$



$\rightarrow GL(n, \mathbb{R})$  такое, что  $\tilde{A}(0) = A$  и либо  $\tilde{A}(1) = E$ , либо  $\tilde{A}(1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$  в зависимости от знака  $\det A$ .

Положим

$$\tilde{S}_2(x, \xi, t) = \langle x + (1-t)v, \tilde{A}(t)\xi \rangle.$$

Функция  $\tilde{S}_2(x, \xi, t)$  задает семейство  $\{\tilde{g}_2(t)\}$  глобально определенных конических канонических преобразований. В частности, это семейство определено в окрестности точки  $(y_0, \xi_0)$ , причем  $\tilde{g}_2(0) = g_2$ ,  $\tilde{g}_2(1) \equiv g_3$  — одно из преобразований, указанных в формулировке теоремы. Из наших построений следует, что существует непрерывное семейство отображений  $\{\tilde{g}(t)\}$ ,  $t \in [0, 1]$ , удовлетворяющее условиям 1° и 2°, гладкое вне конечного числа точек  $t_1, \dots, t_s \in [0, 1]$ , причем на множестве  $[0, 1] \setminus \{t_1, \dots, t_s\}$  все производные  $\partial^\beta \tilde{g}(t) / \partial t^\beta$  — однородные, степени 1, отображения  $T_0^* \mathbb{R}^n \rightarrow T_0^* \mathbb{R}^n$ , и ограничены на единичных сферах равномерно по  $t \in [0, 1] \setminus \{t_1, \dots, t_s\}$ .

Пусть  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  — гладкая строго монотонная функция такая, что  $f(t_k) = t_k$ ,  $k = 1, \dots, s$ ,  $\partial^\beta f / \partial t^\beta(t_k) = 0$  при всех  $\beta > 0$ ,  $k = 1, \dots, s$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ . Тогда  $g_t = \tilde{g}(f(t))$  удовлетворяет всем условиям теоремы. Теорема 5.3. доказана.

**Теорема 5.4.** Пусть  $g$  — локальное коническое каноническое преобразование конической области  $V \subset T_0^* \mathbb{R}^n$  в  $T_0^* \mathbb{R}^n$ ,  $(x_0, \xi_0) \in V$  — произвольная точка. Существуют коническая окрестность  $W \subset V$  точки  $(x_0, \xi_0)$  и псевдодифференциальный оператор  $\hat{H}(t) = H\left(t, x, -i \frac{\partial}{\partial x}\right)$  первого порядка с вещественным главным символом, удовлетворяющие следующим условиям. Для любой функции  $\Phi \in \mathcal{O}^1(W)$  существуют такая функция  $\Phi_1 \in \mathcal{O}^{1-1}(W)$  и такое гладкое семейство  $\{R_t\}$ ,  $t \in [0, 1]$ , интегральных операторов в  $\mathbb{R}^n$  с гладким ядром, что  $T(g, \Phi) = \Phi(1)$ . Семейство  $\Phi(t)$  удовлетворяет задаче Коши

$$-i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t) + \hat{H}(t) \Phi(t) = R_t, \quad (5.8)$$

$$\Phi|_{t=0} = \Phi_0, \quad (5.9)$$

причем

$$\Phi_0 = (\varphi + \varphi_1) \left( x, -i \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (5.10)$$

либо

$$\Phi_0 = (\varphi + \varphi_1) \left( x, -i \frac{\partial}{\partial x} \right) \circ U_1. \quad (5.11)$$

Здесь  $U_1$  — унитарный оператор в  $H^s(\mathbb{R}^n)$ , задаваемый следующей формулой:

$$U_1 f(x^1, \dots, x^n) = f(-x_1, x_2, \dots, x_n).$$

**Доказательство.** Применяя к каноническому преобразованию  $g$  теорему 5.3, получим семейство  $g_t$  однородных канонических преобразований. Рассмотрим векторное поле в  $\mathbb{R}^n$  следующего вида:

$$V(x, t) = \frac{d}{d\varepsilon} \{g(t + \varepsilon) \circ g^{-1}(t)(x)\}.$$

Векторное поле  $V(x, t)$  определено в области  $g(t)W$  и является в этой области гамильтоновым, т. е. существует вещественная функция  $H_1(x, p, t)$  такая, что

$$V(x, t) = \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p}.$$

Так как поле  $V(x, t)$  однородно, то можно добиться, чтобы функция  $H_1(x, p, t)$  была однородной функцией степени 1.

Продолжим функцию  $H_1(x, p, t)$  произвольным образом на внешность области  $g(t)W$  так, чтобы сохранились ее вещественность и однородность. Положим

$$H(x, p, t) = H_1(x, p, t) + \frac{t}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^i \partial p_i}(x, p, t).$$

Оператор переноса (4.12) для символа  $H(x, p, t)$  имеет вид  $\mathcal{P} = \frac{d}{dt}$ . Поэтому оператор  $T(t) = T(g(t), \varphi)$  удовлетворяет задаче Коши (5.8) «в главном члене». Подбирая такую функцию  $\psi_N(t) \in O^{l-1}(W)$ , что функция  $\varphi + \psi_N(t)$  удовлетворяет уравнению переноса (4.12) с оператором  $\tilde{\mathcal{P}}^N$ , устремляя  $N$  к  $\infty$  и суммируя ряд из однородных функций, получаем утверждение теоремы 5.4.

Доказательство теорем 5.1 и 5.2 достаточно провести «в локальной ситуации». Для интегральных операторов Фурье вида (5.10) и (5.11) утверждения теорем 5.1 и 5.2 очевидны — они следуют из теоремы об ограниченности псевдодифференциальных операторов в шкале  $\{H_{1/2}^s\}$  и теоремы о коммутации 1.8. Поэтому, применяя стандартные рассуждения метода энергетических неравенств к задаче Коши (5.8) — (5.9) и используя теорему 4.1, мы получаем утверждения теорем 5.1 и 5.2 в общем случае.

**Пример. Канонические преобразования псевдодифференциальных операторов.** Пусть  $M, N$  — два многообразия,  $\hat{H}_1, \hat{H}_2$  — псевдодифференциальные операторы порядка  $r$  на  $M$  и  $N$  соответственно. Можно построить интегральный оператор Фурье  $\Phi$  такой, что с точностью до младших членов выполнено равенство

$$\hat{H}_1 \Phi = \Phi \hat{H}_2. \quad (5.12)$$

Впервые этот вопрос изучался Ю. Егоровым [1]. Он показал, что если  $\Phi$  — интегральный оператор вида

$$[\Phi f](x) = \int \exp\{iS(x, \xi)\} \hat{f}(\xi) d\xi, \\ \det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \xi} \right\| \neq 0,$$

и выполнено равенство (5.12), то главные символы операторов  $\hat{H}_1$  и  $\hat{H}_2$  связаны каноническим преобразованием, производящая функция которого есть  $S(x, \xi)$ . Следующая теорема является непосредственным обобщением этого результата.

**Теорема 5.5** Пусть  $\Phi$  — интегральный оператор Фурье, ассоциированный с коническим лагранжевым вложением

$$i: L \rightarrow T_0^* M_1 \times N.$$

Для того чтобы выполнялось равенство (5.12), необходимо и достаточно, чтобы

$$i^*(H_{1r} \otimes 1_N - 1_M^* \otimes H_{2r}) = 0.$$

Доказательство немедленно следует из теоремы о коммутации п. д. о. с интегральным оператором Фурье.

## Г Л А В А VIII

### НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

#### § 8.1. Асимптотические решения задачи Коши

1. Канонический оператор Маслова в расширенном фазовом пространстве. Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = H(x, \hat{p}, t) \psi \quad (1.1)$$

с начальным условием специального типа

$$\psi(x, 0) = \exp\left(\frac{i}{h} S_0(x)\right) \varphi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.2)$$

и применим метод канонического оператора для нахождения асимптотического решения этой задачи. Разумеется, вместо уравнения (1.1) мы будем пытаться удовлетворить сравнению  $(\text{mod } h^N)$ . С другой стороны, начальные условия (1.2) можно заменить на более общие условия, когда в правой части (1.2) стоит значение канонического оператора на некотором лагранжевом многообразии  $L_0$ , вложенном в фазовое пространство  $\Phi = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$  с координатами  $(x, p) = (x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$ . Таким образом, ищем функцию  $\psi$ , удовлетворяющую сравнению

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = H(x, \hat{p}, t) \psi \pmod{h^N}$$

и начальному условию  $\psi|_{t=0} = K_0 \varphi_0$ , где  $\varphi_0$  — функция на лагранжевом многообразии  $L_0$ .

Введем обозначение  $-ih \frac{\partial}{\partial t} = \hat{E}$ . Тогда задача (1.1) — (1.2) может быть переписана в виде

$$[\hat{E} + H(x, \hat{p}, t)]\psi = 0, \quad \psi|_{t=0} = K_0\Phi_0. \quad (1.3)$$

Для решения этой задачи введем расширенное фазовое пространство

$$\Phi' = R^n \oplus R_n \oplus R^1 \oplus R_1$$

с координатами  $(x, p, t, E)$  и симплектической формой  $dp \wedge dx + dE \wedge dt$ . Функция Гамильтона, отвечающая задаче (1.3), равна

$$\mathcal{H}(x, p, t, E) = E + H(x, p, t). \quad (1.4)$$

Нашей ближайшей целью является построение в расширенном фазовом пространстве  $\Phi'$  квазиклассического объекта (лагранжева многообразия с мерой), который будет использован для построения асимптотического решения задачи (1.3).

Рассмотрим гамильтоново векторное поле, отвечающее гамильтониану (1.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial E} = \\ = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial t} \frac{\partial}{\partial E}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Мы будем иногда обозначать это векторное поле через  $d/dt$ . Предположим, что система Гамильтона, отвечающая векторному полю (1.5),

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p}(x, p, t), \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p, t), \\ \dot{E} &= -\frac{\partial H}{\partial t}(x, p, t), \\ \dot{t} &= 1 \end{aligned} \quad (1.6)$$

(точка означает дифференцирование по параметру  $\tau$ ) имеет решение при  $0 \leq \tau \leq T$  при любых начальных данных. Это означает, что при  $0 \leq \tau \leq T$  определена локальная группа диффеоморфизмов  $g^\tau(d/d\tau)$  расширенного фазового пространства, отвечающая векторному полю  $d/d\tau$ . Именно, если

$$\begin{aligned}x &= X(x_0, p_0, E_0, t_0, \tau), & p &= P(x_0, p_0, E_0, t_0, \tau), \\E &= E(x_0, p_0, E_0, t_0, \tau), & t &= t_0 + \tau\end{aligned}$$

— решение системы (1.6) с начальными данными  $(x_0, p_0, E_0, t_0)$ , то

$$g^\tau(x_0, p_0, E_0, t_0) = (x, p, E, t).$$

Рассмотрим теперь вложение начального лагранжева многообразия  $L_0$  в расширенное фазовое пространство  $\Phi'$ . Это вложение определим следующим образом. Пусть

$$x = x(\alpha), \quad p = p(\alpha), \quad \alpha \in L_0,$$

— функции, задающие вложение  $i_0: L_0 \hookrightarrow \Phi$ . Тогда вложение  $i: L_0 \hookrightarrow \Phi'$  зададим с помощью

$$\begin{aligned}x &= x(\alpha), \quad p = p(\alpha), \quad t = 0, \\E &= -H(x(\alpha), p(\alpha), 0).\end{aligned}\tag{1.7}$$

Отметим, что вложение  $i: L_0 \hookrightarrow \Phi'$  зависит от гамильтониана  $H(x, p, t)$  и поэтому не порождается никаким стандартным вложением. Обозначим через  $L_\tau$  сдвиг многообразия  $L_0 \hookrightarrow \Phi'$  вдоль траекторий системы Гамильтона (1.6):  $L_\tau = g^\tau(L_0)$ , а через  $L$  — фазовый поток многообразия  $L_0$  за время  $T$ :  $L = \bigcup_{0 \leq \tau \leq T} L_\tau$ .

Сделаем важное замечание о выборе параметра. В силу последнего уравнения системы (1.6) и начального условия (1.7) имеем  $\tau = t$  на рассматриваемых траекториях. Поэтому мы будем пользоваться обозначениями:  $L = \bigcup_{0 \leq t \leq T} L_t$  вместо  $L = \bigcup_{0 \leq \tau \leq T} L_\tau$  и  $L_t = g^t L_0$  вместо  $L_\tau = g^\tau L_0$  соответственно. Заметим еще, что решение

системы (1.6) с начальными данными (1.7)

$$x = X(\alpha, t), \quad p = P(\alpha, t), \quad E(\alpha, t) = E, \quad t = t$$

определяет диффеоморфизм многообразия  $L$  и многообразия  $L_0 \times [0, T]$ . Таким образом, если  $(\beta_0^1, \dots, \beta_0^n)$  — система координат на открытом множестве  $U \subset L_0$ , то  $(\beta_0^1, \dots, \beta_0^n, t)$  — координаты на фазовом потоке карты  $U$ , который является открытым множеством в многообразии  $L$ . Этим обстоятельством мы будем часто пользоваться в дальнейшем для координатного описания объектов на многообразии  $L$ .

**Предложение 1.1.** *Многообразие  $L$  является лагранжевым многообразием в расширенном фазовом пространстве, причем  $\mathcal{H}|_L = 0$ .*

**Доказательство.** Функция  $\mathcal{H}$  является постоянной вдоль траекторий системы (1.6), так как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{H}(x, p, t, E) &= \\ &= d\mathcal{H} \left( \frac{d}{dt} \right) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} dx \left( \frac{d}{dt} \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} dp \left( \frac{d}{dt} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \left( \frac{d}{dt} \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E} dE \left( \frac{d}{dt} \right) = \\ &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial t} = 0. \end{aligned}$$

Из формул (1.7) следует, что функция  $\mathcal{H}$  тождественно равна нулю на подмногообразии  $L_0$ , следовательно,  $\mathcal{H}|_L = 0$ .

Для доказательства лагранжевости нужно показать, что ограничение симплектической формы на многообразие  $L$  равно нулю, т. е.

$$dp \wedge dx + dE \wedge dt|_L = 0.$$

Покажем сначала, что при каждом значении параметра  $t \in [0, T]$  имеет место равенство

$$dx \wedge dp + dE \wedge dt|_{L_t} = 0.$$

Отметим, что  $dx \wedge dp + dE \wedge dt|_{L_t} = dx \wedge dp|_{L_t}$ , так как на многообразии  $L_t$   $t = \text{const}$ . При  $t = 0$  требуемое

утверждение следует из лагранжевости многообразия  $L_0$  в фазовом пространстве  $(\Phi, dx \wedge dp)$  и формул (1.7), задающих вложение. Далее, производная Ли от формы  $dp \wedge dx + dE \wedge dt$  вдоль траекторий системы (1.6) равна \*)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{d/d\tau} (dp \wedge dx + dE \wedge dt) &= \\ &= d \left( \frac{d}{d\tau} \lrcorner dp \wedge dx + dE \wedge dt \right) + \\ &+ \frac{d}{d\tau} \lrcorner d (dp \wedge dx + dE \wedge dt) = \\ &= -d(d\mathcal{H}) + 0 = 0, \quad (1.8) \end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \lrcorner dp \wedge dx + dE \wedge dt &= \\ = dp \left( \frac{d}{d\tau} \right) dx - dx \left( \frac{d}{d\tau} \right) dp + dE \left( \frac{d}{d\tau} \right) dt - dt \left( \frac{d}{d\tau} \right) dE &= -d\mathcal{H}. \end{aligned}$$

Формула (1.8) показывает, что

$$dx \wedge dp + dt \wedge dE \big|_{L_t} = 0.$$

Пусть теперь  $m \in L$  — произвольная точка многообразия  $L$ ,  $X_m, Y_m \in T_m L$  — произвольные касательные векторы к многообразию  $L$  в точке  $m$ . Тогда векторы  $X_m, Y_m$  разлагаются в суммы

$$X_m = X'_m + \lambda \frac{d}{d\tau}, \quad Y_m = Y'_m + \mu \frac{d}{d\tau},$$

причем векторы  $X'_m, Y'_m$  касаются подмногообразия  $L_t$  в точке  $m$ .

---

\*) Если  $\omega$  — дифференциальная форма, а  $X$  — векторное поле, то через  $X \lrcorner \omega$  обозначается дифференциальная форма  $\Omega$  на единицу меньшей размерности, значение которой вычисляется по следующей формуле:

$$\Omega(Y_1, \dots, Y_s) = \sum_{i=1}^{s+1} (-1)^i \omega(Y_1, \dots, Y_{i-1}, X, Y_i, \dots, Y_s).$$

Другими словами, форма  $X \lrcorner \omega$  — это функция от меньшего числа векторных полей как своих аргументов, когда один из аргументов принимает фиксированное значение, равное векторному полю  $X$ .



Тогда

$$\begin{aligned}
 \langle dp \wedge dx + dE \wedge dt; X_m, Y_m \rangle &= \\
 &= \langle dp \wedge dx + dE \wedge dt; X'_m, Y'_m \rangle + \\
 &+ \lambda \left\langle \left( \frac{d}{d\tau} \lrcorner dp \wedge dx + dE \wedge dt \right), X'_m \right\rangle - \\
 &- \mu \left\langle \left( \frac{d}{d\tau} \lrcorner dp \wedge dx + dE \wedge dt \right), Y'_m \right\rangle = \\
 &= -\lambda d\mathcal{H}(X'_m) + \mu d\mathcal{H}(Y'_m) = 0, \quad (1.9)
 \end{aligned}$$

так как первое слагаемое в средней части равенств (1.9) равно нулю по доказанному выше, а  $d\mathcal{H}|_L = 0$ . Предложение доказано.

**З а м е ч а н и е.** По построению многообразие  $L$  является инвариантным относительно траекторий системы (1.6).

Пусть теперь  $\mu_0$  — некоторая мера на лагранжевом многообразии  $L_0$  и  $K_0$  — канонический оператор на многообразии  $L_0$ , ассоциированный с мерой  $\mu_0$ . Очевидно, что новая мера

$$\mu = \mu_0 \wedge dt = \mu_0(\alpha) \wedge dt, \quad \alpha \in L_0, \quad (1.10)$$

на многообразии  $L$  является инвариантной относительно векторного поля  $d/d\tau$ . При этом, если  $(x'_0, p_{0\bar{I}})$  — канонические координаты в карте  $U_I$  многообразия  $L_0$ , то

$$\frac{\mu}{dx'_0 \wedge dp_{0\bar{I}} \wedge dt} = \frac{\mu_0}{dx'_0 \wedge dp_{0\bar{I}}}.$$

Отметим, что можно выбрать такое покрытие многообразия  $L$  каноническими картами, чтобы функция  $E$  ни в одной карте этого покрытия не являлась координатой (это следует из последнего соотношения в (1.6)). Далее, поскольку каждый цикл в многообразии  $L$  стягивается к многообразию  $L_0$ , то квантованность многообразия  $L$  является следствием квантованности многообразия  $L_0$ . Поэтому на многообразии  $L$  определен некоторый канонический оператор  $K$ , ассоциированный с мерой  $\mu$ .

**П р е д л о ж е н и е 1.2. Формула**

$$K_{t_0}(\varphi | L_{t_0}) = [K\varphi]_{t=t_0}, \quad (1.11)$$

корректно определяет канонический оператор  $K_{t_0}$  на многообразии  $L_{t_0}$  для любого фиксированного значения  $t_0$  из промежутка  $[0, T]$ .

Доказательство. Пусть  $U_I$  — каноническая карта на многообразии  $L$  с координатами  $(x^I, p_I, t)$ , имеющая непустое пересечение с многообразием  $L_{t_0}$ . Очевидно, множество  $U_{t_0} = U \cap L_{t_0}$  — открытое множество в многообразии  $L_{t_0}$ , а функции  $(x^I, p_I)$  образуют систему координат в карте  $U_{t_0}$ . Пусть  $\varphi_{t_0} \in C_0^\infty(U_{t_0})$  — функция на многообразии  $L_{t_0}$ ,  $\varphi$  — произвольное продолжение функции  $\varphi_{t_0}$  до функции из  $C_0^\infty(U)$ . Вычислим правую часть соотношения (1.11) для функции  $\varphi$ :

$$[K\varphi]_{t=t_0} = \left\{ F^{1/h}_{p_I \rightarrow x^I} \exp\left(\frac{i}{h} S_I(x^I, p_I, t)\right) \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\mu_I(x^I, p_I, t)} \left( \sum_{U_I \cap U_J \neq \emptyset} V_{IJ}(e_J(x^I, p_I, t) \varphi(x^I, p_I, t)) \right) \right\}_{t=t_0}. \quad (1.12)$$

Здесь  $e_I(x^I, p_I, t)$  — разбиение единицы, подчиненное покрытию  $\{U_I\}$ .

Отметим, что дифференциальные операторы  $V_{IJ}$ , возникающие при сравнении элементарных канонических операторов в картах  $U_I$  и  $U_J$ , не содержат дифференцирования по переменной  $t$ . Это связано со специальным видом канонического атласа на многообразии  $L$ , при котором переменная  $t$  является координатой в любой канонической карте. Поэтому

$$V_{IJ}(e_J(x^I, p_I, t) \varphi(x^I, p_I, t))|_{t=t_0} = \\ = V_{IJ}^{t_0}(e_J(x^I, p_I, t_0) \varphi_{t_0}(x^I, p_I)), \quad (1.13)$$

где оператор  $V_{IJ}^{t_0}$  получается из оператора  $V_{IJ}$  сужением коэффициентов этого оператора на подмногообразие  $L_{t_0}$ . С учетом соотношения (1.13) соотношение (1.12) можно переписать в виде

$$K\varphi|_{t=t_0} = F^{1/h}_{p_I \rightarrow x^I} \left[ \exp\left\{\frac{i}{h} S_I^{t_0}(x^I, p_I)\right\} \sqrt{\mu_I^{t_0}(x^I, p_I)} \times \right. \\ \left. \times \left( \sum_{U_I \cap U_J \neq \emptyset} V_{IJ}^{t_0}(e_J^{t_0}(x^I, p_I) \varphi_{t_0}(x^I, p_I)) \right) \right], \quad (1.14)$$

где  $S_I^{t_0}(x^I, p_{\bar{I}}) = S_I(x^I, p_{\bar{I}}, t_0)$ ,  $\mu_I^{t_0}(x^I, p_{\bar{I}}) = \mu_I(x^I, p_{\bar{I}}, t_0)$ ,  $e_J^{t_0}(x^I, p_{\bar{I}}) = e_J(x^I, p_{\bar{I}}, t_0)$  — сужения соответствующих функций на многообразии  $L_{t_0}$ . Формула (1.14) показывает независимость правой части соотношения (1.11) от выбора продолжения  $\varphi$  функции  $\varphi_{t_0}$ ; таким образом, оператор  $K_{t_0}$  определен формулой (1.11) корректно. Покажем теперь, что  $K_{t_0}$  есть канонический оператор, ассоциированный с многообразием  $L_{t_0}$  и мерой  $\mu_{t_0}$ , определяемой из соотношения

$$\mu = \mu_t \wedge dt, \quad \mu_{t_0} = \mu_t|_{t=t_0}. \quad (1.15)$$

Нетрудно видеть, что семейство функций  $\{e_I^{t_0}\}$  является разбиением единицы, подчиненным каноническому покрытию  $\{U_{I,t_0}\}$  многообразия  $L_{t_0}$ . Далее, коцепь  $\{S_I^{t_0}\}$  удовлетворяет всем условиям, предъявляемым к действию на лагранжевом многообразии  $L_{t_0}$ . В самом деле,

$$\begin{aligned} dS_I^{t_0} &= [dS_I]_{t=t_0} = [p_I dx^I - x^{\bar{I}} dp_{\bar{I}} + E dt]_{t=t_0} = \\ &= p_I dx^I - x^{\bar{I}} dp_{\bar{I}}, \quad (1.16) \end{aligned}$$

$$S_I^{t_0} - S_J^{t_0} = [S_I - S_J]_{t=t_0} = [x^{I_3} p_{I_3} - x^{I_2} p_{I_2}]_{t=t_0} = x^{I_3} p_{I_3} - x^{I_2} p_{I_2},$$

$$\mu_I^{t_0} = [\mu_I]_{t=t_0} =$$

$$= \left[ \frac{\mu}{dx^I \wedge dp_{\bar{I}} \wedge dt} \right]_{t=t_0} = \left[ \frac{\mu_t}{dx^I \wedge dp_{\bar{I}}} \right]_{t=t_0} = \frac{\mu_{t_0}}{dx^I \wedge dp_{\bar{I}}}.$$

Аналогично проверяется условие выбора аргументов. Поскольку в формуле (1.14) аргумент  $\mu_I^{t_0}$  необходимо брать равным аргументу  $\mu_I(x^I, p_{\bar{I}}, t_0)$ , то

$$\begin{aligned} \text{Arg } \mu_I^{t_0} - \text{Arg } \mu_J^{t_0} &= [\text{Arg } \mu_I - \text{Arg } \mu_J]_{t=t_0} = \\ &= \left[ \sum_k \arg \lambda_{k,IJ} \right]_{t=t_0} + |I_2| \pi, \quad (1.17) \end{aligned}$$

где  $\lambda_{k,IJ}$  — собственные значения матрицы

$$\frac{\partial (-p_{I_2}, x^{I_3})}{\partial (x^{I_2}, p_{I_3})}. \quad (1.18)$$

Учитывая, что в последнее выражение не входит дифференцирование по  $t$ , получаем

$$\left[ \sum_k \arg \lambda_{k,IJ} \right]_{t=t_0} = \sum_k \arg \lambda_{k,IJ}^{t_0}, \quad -3\pi/2 < \arg \lambda_{k,IJ}^{t_0} \leq \pi/2,$$

где  $\lambda_{k,IJ}^{t_0}$  — собственные значения матрицы

$$\frac{\partial (p_{I_2}, x^{I_2})}{\partial (x^{I_2}, p_{I_2})}$$

на многообразии  $L_{t_0}$ .

Таким образом, формула (1.11) определяет в каждой карте  $U_{I,t_0}$  локальный канонический оператор, причем условия (1.16) и (1.17) обеспечивают коцикличность определенной таким образом операторной коцепи. Предложение доказано.

*С л е д с т в и е.* Можно таким образом выбрать оператор  $K$  на многообразии  $L$ , чтобы оператор  $K_t|_{t=0}$  был равен оператору  $K_0$ , входящему в (1.3).

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Пусть  $\tilde{K}$  — некоторый канонический оператор на многообразии  $L$ . Тогда операторы  $K_0$  и  $\tilde{K}_t|_{t=0}$  являются каноническими операторами на многообразии  $L_0$ . Следовательно, операторы  $K_0$  и  $\tilde{K}_t|_{t=0}$  отличаются на мультипликативную постоянную вида  $\exp \left\{ i \left( C_1 + \frac{C_2}{h} \right) \right\}$ , т. е.

$$K_0 = \exp \left\{ i \left( C_1 + \frac{C_2}{h} \right) \right\} \tilde{K}_t|_{t=0}.$$

Требуемый оператор  $K$  определяется формулой

$$K = \exp \left\{ i \left( C_1 + \frac{C_2}{h} \right) \right\} \tilde{K}.$$

Следствие доказано.

2. Построение асимптотики решения задачи Коши. Применим теперь построенный оператор  $K$  к нахождению асимптотических решений задачи (1.3). Будем искать решение в виде

$$\psi(x, t, h) = K\phi. \quad (1.19)$$

Согласно предложению 1.1, замечанию к этому предложению и формуле (1.10) для определения меры  $\mu$ ,

многообразие  $L$  с мерой  $\mu$  ассоциировано с гамильтонианом  $\mathcal{H}$ . Применим формулу коммутации (предложение 3.1 гл. VI)

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x, \hat{p}, t, \hat{E}) \psi &= \\ &= (\hat{E} + H(x, \hat{p}, t)) \psi = \mathcal{H}(x, \hat{p}, t, \hat{E}) K\varphi = -i\hbar K\mathcal{P}\varphi,\end{aligned}$$

где  $\mathcal{P}$  — полином по переменной  $\hbar$ , коэффициенты которого являются дифференциальными операторами:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 + \hbar \mathcal{P}_1 + \dots \quad (1.20)$$

Главный член оператора  $\mathcal{P}$  имеет вид

$$\mathcal{P}_0 = \frac{d}{d\tau} - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x \partial p} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t \partial E} \right] = \frac{d}{d\tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p}. \quad (1.21)$$

Для того чтобы функция  $\psi(x, t, \hbar)$  удовлетворяла уравнению (1.1), достаточно потребовать выполнения условия

$$\mathcal{P}\varphi \equiv 0 \pmod{\hbar^N}. \quad (1.22)$$

Для решения сравнения (1.22) будем искать функцию  $\varphi$  в виде полинома по  $\hbar$ :

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \hbar \varphi^{(1)} + \hbar^2 \varphi^{(2)} + \dots \quad (1.23)$$

Подстановка выражения (1.23) в сравнении (1.22) дает с учетом формул (1.20) и (1.21) рекуррентную систему для определения функций  $\varphi^{(i)}$ :

$$\left[ \frac{d}{d\tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} \right] \varphi^{(0)} = 0, \quad (1.24)$$

$$\left[ \frac{d}{d\tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} \right] \varphi^{(1)} = -\mathcal{P}_1 \varphi^{(0)}, \quad (1.25)$$

.....

$$\left[ \frac{d}{d\tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} \right] \varphi^{(l)} = - \sum_{\substack{k+l=j \\ k \geq 1}} \mathcal{P}_k \varphi^{(k)}. \quad (1.26)$$

Эта система может быть решена интегрированием вдоль траекторий векторного поля  $d/d\tau$ , ибо на траекториях этого поля каждое из уравнений (1.24), (1.25), (1.26) есть обыкновенное дифференциальное уравнение

первого порядка. Начальные условия для уравнений (1.24), (1.25), (1.26) получаются из условия (1.2). С учетом предложения 1.2 это условие переписывается в виде

$$\begin{aligned}\varphi(x, t, h)|_{t=0} &= K[\varphi^{(0)} + h\varphi^{(1)} + h^2\varphi^{(2)} + \dots]|_{t=0} = \\ &= K_0[\varphi^{(0)} + h\varphi^{(1)} + \dots]|_{t_0} = K_0\varphi_0,\end{aligned}$$

откуда получаем

$$\varphi^{(0)}|_{t=0} = \varphi_0, \quad \varphi^{(j)}|_{t=0} = 0, \quad j \neq 0.$$

Итак, нами доказана следующая теорема.

**Теорема 1.3.** *Асимптотическое решение задачи (1.3) дается формулой (1.19) с функцией  $\varphi$ , имеющей вид (1.23), причем коэффициенты  $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \dots$  при различных степенях  $h$  определяются из уравнений (1.24) — (1.26) с начальными условиями*

$$\varphi^{(0)}|_{t=0} = \varphi_0, \quad \varphi^{(j)}|_{t=0} = 0, \quad j \neq 0.$$

Рассмотрим теперь более подробно построение оператора  $K$  (или операторов  $K_{t_0}$  при всех  $t_0 \in [0, T]$ ). Заметим, что оператор  $K_{t_0}$  при каждом  $t_0$  должен быть ассоциирован с многообразием  $L_{t_0}$  и мерой  $\mu_{t_0}$ , определенной формулой (1.15). Все такие операторы можно получить из одного из них умножением на константу вида

$$\exp \left\{ i \left( C_1 + \frac{C_2}{h} \right) \right\}.$$

Очевидно, значения констант  $C_1$  и  $C_2$  можно определить с помощью значений действия и аргумента якобиана в какой-либо точке многообразия  $L_{t_0}$ .

Рассмотрим сначала константу  $C_2$ . Пусть  $\alpha_0 \in L_0$  — некоторая фиксированная точка на многообразии  $L_0$ . Обозначим через  $\alpha_{t_0}$  образ  $g^{t_0}\alpha_0$  при диффеоморфизме  $g^{t_0}$ . Точка  $\alpha_{t_0}$  соединена с точкой  $\alpha_0$  траекторией  $\{g^t\alpha, 0 \leq t \leq t_0\} = \gamma_{t_0}$ . Для определения  $C_2$  заметим, что кощепь  $S_t$  в силу условий (1.16) определяется глобальной функцией  $S$  (неособым действием). В самом деле, определим функцию  $S$  в карте  $U_I$  формулой

$$S = S_I + x^{\bar{J}} p_{\bar{J}}. \quad (1.27)$$

Условия (1.16) гарантируют тогда независимость  $S$  от выбора карты  $U_I$ , а коцепь  $S_I$  восстанавливается по функции  $S$  с помощью формулы (1.27). Заметим еще, что функция  $S$  удовлетворяет уравнению Пфаффа

$$dS = p dx + E dt = p dx - H dt$$

и поэтому константа  $C_2$  определяется из условия

$$S^{t_0}(a_{t_0}) = S^0(a_0) + \int_0^{t_0} p dx - H dt,$$

причем интеграл берется по траектории  $\gamma_{t_0}$ .

Рассмотрим теперь константу  $C_1$ . Ситуация здесь существенным образом отличается от рассмотренной выше, так как условия (1.17) не позволяют определить глобально неособый аргумент  $\text{Arg } \mu$ . Это обусловлено тем, что матрица (1.18) невырождена на пересечении карт  $U_I$  и  $U_J$ , может обращаться в нуль в карте  $U_I$ ; поэтому функции  $\arg \lambda_{k,IJ}$  могут меняться скачком. Исследование константы  $C_1$  мы проведем при следующем упрощающем предположении \*).

*Особые точки проекции  $\pi: L_{t_0} \rightarrow \mathbb{R}_x^n$  вдоль  $\mathbb{R}_{n-p}$  образуют подмногообразие многообразия  $L_{t_0}$  коразмерности 1.*

Это подмногообразие мы будем обозначать  $\Sigma_{t_0}$  и называть циклом особенностей многообразия  $L_{t_0}$ .

На каждой компоненте связности множества  $L_{t_0} \setminus \Sigma_{t_0}$  формула

$$\text{Arg } \mu^{t_0} = -\text{Arg } \mu_I^{t_0} + \sum_k \arg \lambda_{k,I}^{t_0},$$

$$-3\pi/2 < \arg \lambda_{k,I}^{t_0} < \pi/2,$$

где  $\lambda_k^{t_0}$  — собственные значения матрицы

$$\left( \frac{\partial x^I}{\partial p_I} \right), \quad (1.28)$$

корректно определяет число, кратное  $\pi$ . Отметим еще, что

$$\sum_k \arg \lambda_k^{t_0} = -\pi \text{ index}_{(-)} \left\| \frac{\partial x^I}{\partial p_I} \right\|,$$

\*) Типа «общего положения».

где  $\text{index}_{(-)} \left\| \frac{\partial x^{\bar{I}}}{\partial p_{\bar{I}}} \right\|$  — отрицательный индекс инерции матрицы

(1.28). Функция  $\text{Arg} \mu^{t_0}$  является постоянной вдоль каждой кривой, не пересекающей цикла особенностей  $\bigcup_{0 \leq t \leq T} \Sigma_t$ .

Поэтому вдоль кривой  $\gamma_{t_0}$  эта функция терпит разрыв только в точках пересечения с  $\bigcup_{0 \leq t \leq T} \Sigma_t$ . Исследуем изменение этой функции при пересечении цикла особенностей.

Пусть кривая  $\gamma_{t_0}$  пересекает  $\bigcup_{0 \leq t \leq T} \Sigma_t$  в точках  $t_1, t_2, \dots$

$\dots, t_m$ . Тогда  $\text{Arg} \mu^t$  меняется при переходе точки  $t_i$  в соответствии с формулой

$$\begin{aligned} \text{Arg} \mu^{t_0+0} &= \text{Arg} \mu_I^{t_i} + \sum_k \arg \lambda_{k,I}^{t_i+0} = \\ &= \text{Arg} \mu_I^{t_i} - \pi \text{index}_{(-)} \left\| \frac{\partial x^{\bar{I}}}{\partial p_{\bar{I}}} \right\| = \text{Arg} \mu_I^{t_i} - \pi \text{index}_{(-)} \left\| \frac{\partial x^{\bar{I}}}{\partial p_{\bar{I}}} \right\|_{t_i-0} + \\ &+ \pi \left\{ \text{index}_{(-)} \left\| \frac{\partial x^{\bar{I}}}{\partial p_{\bar{I}}} \right\|_{t_i-0} - \text{index}_{(-)} \left\| \frac{\partial x^{\bar{I}}}{\partial p_{\bar{I}}} \right\|_{t_i+0} \right\} = \text{Arg} \mu^{t_i-0} + \pi \sigma_i. \end{aligned}$$

Здесь мы ввели обозначение

$$\sigma_i = \text{index}_{(-)} \left\| \frac{\partial x^{\bar{I}}}{\partial p_{\bar{I}}} \right\|_{t_i-0} - \text{index}_{(-)} \left\| \frac{\partial x^{\bar{I}}}{\partial p_{\bar{I}}} \right\|_{t_i+0}. \quad (1.29)$$

Нетрудно проверить, что формула (1.29) определяет целое число для каждой точки  $t_i$ , не зависящее от выбора карты  $U_I$ .

Если теперь значение  $t_0$  таково, что  $\alpha_{t_0} \in \Sigma_{t_0}$ , то можно определить индекс пути  $\gamma_{t_0}$  формулой

$$\text{ind} \gamma_{t_0} = \sum_{t_i < t_0} \sigma_i.$$

Тогда формула для определения  $\text{Arg} \mu^{t_0}$  (или, что то же самое, константы  $C_1$ ) принимает вид

$$\text{Arg} \mu^{t_0}(\alpha_{t_0}) = \text{Arg} \mu^0(\alpha_0) + \pi \text{ind} \gamma_{t_0}.$$



## § 8.2. Асимптотика спектра

### $1/h$ -псевдодифференциальных операторов

1. **Пакеты лагранжевых многообразий.** В данном параграфе мы рассмотрим применение теории канонического оператора к построению асимптотики спектра  $1/h$ -псевдодифференциальных операторов с вещественным гамильтонианом. С этой целью мы несколько обобщим теорию канонического оператора. В частности, основным объектом для построения канонического оператора в этом параграфе будет служить не одно лагранжево многообразие, а некоторым образом параметризованное семейство лагранжевых многообразий. Такие семейства мы будем называть *пакетами лагранжевых многообразий*.

Перейдем к точным определениям.

**Определение 2.1.** *Пакетом лагранжевых многообразий* мы назовем тройку  $\{L, J(h), i_{(h,j)}\}$ , где  $L$  — компактное многообразие;  $J(h)$  — семейство конечных множеств, зависящее от параметра  $h \in (0, 1]$ ;  $i_{(h,j)}: L \rightarrow \Phi$ ,  $j \in J(h)$ , — семейство вложений, для которых при любом  $h$  и  $j \in J(h)$  имеет место равенство

$$i_{(h,j)}^* dp \wedge dx = 0. \quad (2.1)$$

Из условия (2.1) следует, что на многообразии существует семейство канонических атласов  $\{U_i\}_{(h,j)}$ . Существование такого атласа при каждом  $h$ ,  $j \in J(h)$  обеспечивается условием

$$\sum_{I \in [n]} \left| \det \frac{\partial (i_{(h,j)}^* x^I, i_{(h,j)}^* p_I)}{\partial \xi} \right|^2 \neq 0 \quad (2.2)$$

в любой локальной системе координат  $\xi$ .

Нам потребуется усиление условия (2.2). Именно, зафиксируем некоторый конечный атлас  $(V_i, \xi_i)$ ,  $i=1, \dots, m$ . Назовем пакет лагранжевых многообразий равномерно лагранжевым, если существует такая константа  $\delta > 0$ , что

$$\min_{i=1,2,\dots,m} \inf_{\xi_i \in V'_i} \sum_{I \in [n]} \left| \det \frac{\partial (i_{(h,j)}^* x^I, i_{(h,j)}^* p_I)}{\partial \xi_i} \right|^2 \geq \delta > 0, \quad (2.3)$$

$$\max_{i=1,2,\dots,m} \sup_{\xi_i \in V'_i} \{ |D^\alpha i_{(h,j)}^* x|, |D^\alpha i_{(h,j)}^* p| \}_i \leq M_\alpha \quad (2.4)$$

для любого мультииндекса  $\alpha$ , где  $\{V_i'\}$  — такое открытое покрытие  $L$ , что  $V_i'$  компактно вложено в  $V_i$ :  $V_i' \subseteq V_i^*$ ).

**З а м е ч а н и е.** В силу соотношения

$$\sum_{I \subseteq [n]} \left| \det \frac{\partial (i_{(h,j)}^{*I}, i_{(h,j)}^{*p_I})}{\partial \xi_k'} \right|^2 =$$

$$= \left| \det \frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_k'} \right|^2 \sum_{I \subseteq [n]} \left| \frac{\partial (i_{(h,j)}^{*I}, h_{(h,j)}^{*p_I})}{\partial \xi_i} \right|^2$$

условие (2.3) не зависит от выбора конечного атласа и множеств  $V_i'$ .

Определим теперь два функциональных пространства, необходимых для построения теории канонического оператора на лагранжевых пакетах.

**О п р е д е л е н и е 2.2.** Через  $C_h^\infty(L)$  обозначим пространство, элементами которого являются семейства таких функций  $f_{(h,j)}(\xi)$ , параметризованные параметром  $h \in (0, 1]$  и индексом  $j \in J(h)$ , что производные от функций семейства  $f_{(h,j)}$  по локальным координатам многообразия  $L$  равномерно ограничены по  $(h, j)$ ,  $j \in J(h)$ .

Рассмотрим теперь кольцо полиномов от переменной  $h$  вида

$$\sum_{k=0}^{N'} h^k f_{k(h,j)}(\xi) **),$$

где  $f_{k(h,j)}(\xi) \in C_h^\infty(L)$ . Обозначим это пространство через  $C_h^\infty(L)[h]$ . Множество  $I$  пространства  $C_h^\infty(L)[h]$ , состоящее из элементов вида

$$\sum_{k=N}^{N'} h^k f_{k(h,j)}(\xi),$$

как нетрудно видеть, является идеалом в кольце  $C_h^\infty(L)[h]$ .

\*) Заметим, что мы не накладываем никаких условий регулярности на зависимость  $i_{(h,j)}$  от  $h$  и  $j$ .

\*\*) Число  $N'$  зависит от полинома.

Пусть теперь число  $a > 0$  столь мало, что открытый шар радиуса  $a$  относительно метрики  $r$  с центром в любой точке многообразия  $L$  целиком содержится в какой-либо окрестности  $V'_i$ . Очевидно, что для любого числа  $b$ ,  $b > 0$ , можно выбрать такое число  $a > 0$ , чтобы открытый

шар радиуса  $a$  относительно метрики  $r$  с центром в произвольной точке многообразия  $L$  целиком лежал в шаре радиуса  $b$  относительно метрики, определяемой в окрестности центра локальными координатами  $\xi$ . Выберем теперь число  $b$  равным

$$b = \frac{C_{nn}\delta}{M^{2n+2}2^n},$$

где  $M = \max M_\alpha$ ;  $M_\alpha\delta$  — константы оценок (2.3), (2.4), а  $C_{nn}$  — константа, входящая в выражение (2.5) при  $m=n$ . Предположим без ограничения общности, что  $M > 1$ . Докажем, что любой шар радиуса  $a$  (в метрике  $r$ ) при всех  $h$  и  $j \in J(h)$  допускает в качестве координат функции  $i_{(h,j)}^* x^I$  и  $i_{(h,j)}^* p_{\bar{I}}$  для некоторого  $I \subset [n]$ . В самом деле, пусть  $K_a(\xi_0)$  — такой шар с центром в точке  $\xi$ . В силу выбора числа  $a$  этот шар целиком лежит в множестве  $V_i'$  некоторой карты  $(V_i, \xi_i)$ . Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} x^I - i_{(h,j)}^* x^I(\xi_i^1, \dots, \xi_i^n) &= 0, \\ p_{\bar{I}} - i_{(h,j)}^* p_{\bar{I}}(\xi_i^1, \dots, \xi_i^n) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Согласно условию (2.3) найдется такое множество, что  $I \subset [n]$ ,

$$\left| \det \frac{\partial (i_{(h,j)}^* x^I, i_{(h,j)}^* p_{\bar{I}})}{\partial \xi_i} \right| > \sqrt{\frac{\delta}{2^n}} = \sqrt{\frac{\delta}{2^{n/2}}}.$$

Кроме того, если мы обозначим

$$x_0^I = i_{(h,j)}^* x^I(\xi_0^1, \dots, \xi_0^n), \quad p_{\bar{I}_0} = i_{(h,j)}^* p_{\bar{I}}(\xi_0^1, \dots, \xi_0^n),$$

$\xi_0^1, \dots, \xi_0^n$  — координаты точки  $\xi_0$  в системе координат  $(\xi_i)$ , то в точке

$$x_0^I(\xi_0^1, \dots, \xi_0^n), \quad p_{\bar{I}_0}(\xi_0^1, \dots, \xi_0^n)$$

левые части системы (2.6) обращаются в нуль. Далее, первые производные левых частей системы (2.6) по переменным  $x^I$ ,  $p_{\bar{I}}$  равны единице или нулю, а производные по переменным  $\xi_i$  первого и второго порядка в силу

условий (2.4) не больше  $M$ . Поэтому относительно системы (2.6) выполнено условие теоремы о неявной функции при  $M=N$  и  $\delta$ , замененном на  $\sqrt{\delta}/2^{n/2}$ . Теорема о неявной функции гарантирует, что в окрестности точки  $\xi_0$  размера (относительно метрики, индуцированной координатами  $\xi_i$ )

$$\frac{C_{nn}}{M \cdot M^{2n+1}} \left( \frac{\sqrt{\delta}}{2^{n/2}} \right)^2 = \frac{C_{nn}\delta}{M^{2n+2}2^n} = b$$

система уравнений (2.6) имеет единственное решение. Но рассматриваемый шар радиуса  $a$  в силу выбора  $a$  целиком лежит в этой окрестности. Лемма доказана.

**З а м е ч а н и е.** Фактически мы доказали, что семейство канонических атласов  $\{U_i\}_{(h,j)}$ ,  $h \in (0, 1]$ ,  $j \in J(h)$ , можно выбрать так, чтобы множество носителей карт этого семейства не зависело от параметра  $h$  и индекса  $j \in J(h)$ . В качестве такого универсального множества носителей можно взять систему шаров радиуса  $a$  (в метрике  $r$ ). При этом, разумеется, координаты в каждом таком шаре зависят от выбора значений  $h \in (0, 1]$  и  $j \in J(h)$ .

В силу компактности многообразия  $L$  из семейства носителей карт канонических атласов можно выбрать конечное подсемейство. Мы выберем и зафиксируем такое семейство  $U_i$ ,  $i=1, 2, \dots, l$ . Очевидно, что в каждом множестве  $U_i$  существуют координаты  $\xi_i$  такие, что для любых  $h \in (0, 1]$  и  $j \in J(h)$ , если  $x^j$ ,  $p_{j^*}$  — канонические координаты в  $U_i$ , то

$$\left| \det \frac{\partial (x^j, p_{j^*})}{\partial \xi_i} \right| > \frac{\sqrt{\delta}}{2^{n/2}}. \quad (2.7)$$

Нетрудно видеть, что все дальнейшие построения не зависят от выбора конечного подсемейства  $\{U_i\}$ ,  $i=1, 2, \dots, l$ .

**С л е д с т в и е.** На многообразии  $L$  существует такое семейство конечных разбиений единицы  $\{e_i\}_{(h,j)}$ , подчиненных покрытию  $U_i$ ,  $i=1, 2, \dots, l$ , что производные по каноническим координатам при каждом  $h$ ,  $j \in J(h)$  ограничены равномерно по  $h$ ,  $j \in J(h)$ .

**Доказательство.** Достаточно рассмотреть одно разбиение единицы  $\{e_i\}$ , подчиненное покрытию  $U_i$ . Огра-

ниченность соответствующих производных вытекает из неравенства (2.7). Следствие доказано.

Определим теперь понятие квантованного лагранже-  
ва пакета.

**О п р е д е л е н и е 2.4.** Через  ${}^N I_h(U, Z_2)$  обозначим множество элементов  $f \in C_h^\infty(U)$ , для которых существует такое целое число  $k \in \mathbb{Z}$ , что

$$f - 2\pi k = O(h^N)$$

равномерно по всем переменным.

Пусть теперь на многообразии  $L$  задано семейство мер  $\mu_{(h,j)}$  такое, что плотность мер в каждой локальной системе координат  $U_i$  принадлежит  $C_h^\infty(U)$ .

**О п р е д е л е н и е 2.5.** Пакет  $\{L, J(h), i_{(j,h)}\}$  с семейством мер  $\mu_{(h,j)}$  называется *квантованным пакетом с мерой*, если существуют такие семейства коцепей  $\{S_I\}_{(h,j)}$  и  $\{\text{Arg } J_I\}_{(h,j)}$  покрытия  $\{U_i\}$ , что

$$1) \quad dS_{I(h,j)} = i_{(h,j)}^* (p_I dx^I - x^{\bar{I}} dp_{\bar{I}});$$

2)  $\text{Arg } J_{I(h,j)}$  — одно из значений аргумента функции

$$J_{I(h,j)} = \frac{\partial (i_{(h,j)}^* x^I, i_{(h,j)}^* p_{\bar{I}})}{\partial \mu_{(h,j)}},$$

$$\left\{ \frac{1}{h} [S_I - S_{\bar{I}} - x^{\bar{I}} p_{\bar{I}} + x^{\bar{I}} p_{\bar{I}}] - \frac{1}{2} [(\text{Arg } J)_I - (\text{Arg } J)_{\bar{I}}] - \sum_k \arg \lambda_k + |I_2| \pi \right\}_{(h,j)} \in {}^N I_h(U_i \cap U_{\bar{i}}, Z_2), \quad (2.8)$$

причем  $\lambda_k$  — собственные значения матрицы (1.18),

$$\text{Hess}_{x^{I_2}, p_{I_2}} (-S_I), \quad -3\pi/2 < \arg \lambda_k \leq \pi/2.$$

В силу рассматриваний, проведенных в конце предыдущего параграфа (эти рассуждения переносятся без изменений на случай лагранжевых пакетов), коцепи  $S_{I(h,j)}$  и  $\text{Arg } J_{I(h,j)}$  можно выбрать указанным образом тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\frac{1}{h} \int_{\gamma} p dx + \frac{\pi}{2} \text{ind } \gamma \equiv 2\pi k \pmod{h^N} \quad (2.9)$$

для любого фундаментального цикла  $\gamma$  многообразия  $L$ .

2. Канонический оператор на лагранжевых пакетах. Пусть  $\{L, J(h), i_{(h,j)}\}$  — квантованный пакет,  $\{U_i\}$  — конечное множество носителей канонических карт. Как было указано в пункте 1, это множество не зависит от  $h$  и  $j \in J(h)$ . Определим теперь в карте  $U_i$  локальный канонический оператор. Пусть  $\varphi_{(h,j)} \in C_h^\infty(U_i)$  имеет носитель в множестве  $U_i$ .

Определим локальный канонический оператор формулой

$$K_{U_i} \varphi_{(h,j)} \doteq F_{p_I \rightarrow x_I} \exp \left\{ \frac{i}{h} S_{I(h,j)}(x^I, p_I) \right\} \times \\ \times [J_{I(h,j)}(x^I, p_I)]^{-1/2} \varphi_{(h,j)}(x^I, p_I). \quad (2.10)$$

Значение локального канонического оператора на элементе  $\varphi_{(h,j)} \in C_h^\infty(U_i)$  — это семейство функций от переменной  $x \in \mathbb{R}^n$ , параметризованное параметрами  $h \in (0, 1]$  и  $j \in J(h)$ . Обозначим через  $H^{1/h}(\mathbb{R}_x^n)$  пополнение пространства функций из  $C_0^\infty(\mathbb{R}_x^n)$ , зависящих от параметров  $h, j \in J(h)$ , по норме

$$\sup_{\substack{h \in (0, 1) \\ j \in J(h)}} \| (1 + \Delta_x + x^2)^{r/2} f_{(h,j)} \|_{L_2} = \| f \|_{2,h}^*.$$

Через  $H^{1/h}(\mathbb{R}_x^n)$  мы обозначим проективный предел пространств  $H_r^{1/h}(\mathbb{R}_x^n)$  при  $r \rightarrow \infty$ .

Оператор  $1/h$ -преобразования Фурье осуществляет для любого  $r$  непрерывное отображение

$$F_{x \rightarrow p}^{1/h} : H_r^{1/h}(\mathbb{R}_x^n) \rightarrow H_r^{1/h}(\mathbb{R}_{p,n}). \quad (2.11)$$

Определение 2.6. Через  ${}^N I H^{1/h}(\mathbb{R}_x^n)$  мы обозначим такое подпространство пространства  $H^{1/h}(\mathbb{R}_x^n)$ , что  $f_{(h,j)} \in {}^N I H^{1/h}(\mathbb{R}_x^n)$  в том и только в том случае, когда для любого  $r$

$$\| f_{(h,j)} \|_{(r,h)} \leq C_r h^N,$$

---

\*) Здесь  $\Delta_x = \hat{p}^2$  — «квантовый» оператор Лапласа:

$$\hat{p}^2 = - \frac{1}{h^2} \Delta.$$

причем константа  $C_r$  не зависит от  $h \in (0, 1]$ ,  $j \in J(h)$ . Через  ${}^N H^{1/h}(\mathbb{R}_x^n)$  мы обозначим фактор-пространство

$${}^N H^{1/h}(\mathbb{R}_x^n) = H^{1/h}(\mathbb{R}_x^n) / {}^N I^{1/h} H(\mathbb{R}_x^n).$$

**Предложение 2.2.** *Локальный канонический оператор (2.10) осуществляет непрерывное отображение пространств*

$$K_{U_i}: C_h^\infty(U_i) \rightarrow {}^N H^{1/h}(\mathbb{R}_x^n).$$

**Доказательство.** При четном  $r$  имеем

$$(1 + \Delta_{x^I p_{\bar{I}}} + |x^I|^2 + |p_{\bar{I}}|^2)^{r/2} \exp \left\{ \frac{i}{h} S_{I(h,j)} \right\} \times \\ \times [J_{I(h,j)}]^{-1/2} \varphi_{(h,j)}(x^I, p_{\bar{I}}) = \sum_{k=0}^r h^k \Phi_k(x^I, p_{\bar{I}}, h); \quad (2.12)$$

при этом функции  $\Phi_k(x^I, p_{\bar{I}}, h)$  в силу определения пространств  $C_h^\infty(U_i)$  равномерно ограничены по  $(h, j)$ . Более того, функции  $\Phi_k(x^I, p_{\bar{I}}, h)$  линейно выражаются через функции вида  $x^\alpha \hat{p}^\beta(\varphi_{(h,j)})$ ,  $|\alpha| + |\beta| \leq r$ , с коэффициентами, принадлежащими  $C^\infty(U_i)$ . Следовательно, для любого четного  $r$   $L_2$ -норма правой части формулы (2.12) оценивается через норму  $\|\varphi_{(h,j)}\|_{(r,h)}$  с константой, не зависящей от  $h$  и  $j \in J(h)$ . Кроме того, очевидно, что функции  $\Phi_k$  имеют компактный носитель. Поэтому  $L_2$ -норма правой части соотношения (2.12) ограничена константой, не зависящей от  $(h, j)$ . Непрерывность оператора (2.11) показывает теперь, что

$$K_{U_i} \varphi_{(h,j)} \in H^{1/h}(\mathbb{R}_x^n),$$

а оператор  $K_{U_i}$  непрерывен. Предложение доказано.

**Следствие.** *Оператор  $K_{U_i}$  осуществляет непрерывное отображение пространств*

$$K_{U_i}: C_h^\infty(U_i) [h]_N \rightarrow H^{1/h}(\mathbb{R}_x^n).$$



Доказательство. Требуемое утверждение следует из непрерывности отображения

$$h^k: {}^s H^{1/h}(\mathbb{R}_x^n) \rightarrow {}^{s+k} H^{1/h}(\mathbb{R}_x^n),$$

которое проверяется непосредственно.

Определим теперь в ситуации лагранжевых пакетов операторы  $V_{ij}$ , аналогичные операторам  $V_{IJ}$ . Для облегчения доказательств нам потребуется несколько иная запись оператора  $K_{U_i}$ , полностью эквивалентная (2.10). Именно,

$$K_{U_i \Phi(h,j)} = F_{p_I \rightarrow x^I}^{1/h} \exp \left\{ \frac{i}{h} S_{I(h,j)}(x^I, p_I) - \frac{i}{2} (\text{Arg } J)_{I(h,j)}(x^I, p_I) \right\} |J_{I(h,j)}(x^I, p_I)|^{-1/2} \Phi_{(h,j)}(x^I, p_I).$$

Оператор  $V_{ij}$ , определяемый для любых двух карт  $U_i, U_j, U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ,

$$V_{ij}: C_h^\infty(U_i \cap U_j)[h]_N \rightarrow C_h^\infty(U_i \cap U_j)[h]_N,$$

представляет собой семейство операторов  $V_{ij(h,j)}$ . Более того, операторы  $V_{ij(h,j)}$  удовлетворяют соотношению

$$K_{U_i} V_{ij(h,j)} \Phi_{(h,j)} - K_{U_j \Phi(h,j)} = O(h^N) \quad (2.13)$$

для любой функции  $\Phi_{(h,j)} \in C_h^\infty(U_i \cap U_j)[h]_N$  с носителем в пересечении  $U_i \cap U_j$ . Соотношение (2.13) будет выполнено, если выполняется сравнение

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ i \left[ \frac{1}{h} S_{I(h,j)}(x^I, p_I) - \frac{1}{2} (\text{Arg } J)_{I(h,j)}(x^I, p_I) \right] \right\} \times \\ & \quad \times |J_{I(h,j)}(x^I, p_I)|^{-1/2} (V_{ij(h,j)} \Phi_{(h,j)})(x^I, p_I) \equiv \\ & \equiv F_{x^I \rightarrow p_I}^{1/h} F_{p_I \rightarrow x^I}^{1/h} \exp \left\{ \frac{i}{h} S_{J(h,j)}(x^J, p_J) - \frac{1}{2} (\text{Arg } J)_{J(h,j)}(x^J, p_J) \right\} \times \\ & \quad \times |J_{J(h,j)}(x^J, p_J)|^{-1/2} \Phi_{(h,j)}(x^J, p_J) \pmod{h^N}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь  $U_I$  — карта, отвечающая при данных  $(h, j)$  множеству  $U_i$ ;  $V_J$  — карта, отвечающая множеству  $U_j$  при тех же  $(h, j)$ . Как и ранее, введем множества

$$I_1 = I \cap J, \quad I_2 = I - I_1, \quad I_3 = J - I_1, \quad I_4 = [n] \setminus (I_1 \cup I_2 \cup I_3).$$

Тогда правая часть соотношения (2.14) перепишется в виде

$$\left(\frac{i}{2\pi h}\right)^{|I_1+I_2|} (-1)^{|I_1|} \iint \exp \left\{ \frac{i}{h} (-x^{I_1} p_{I_1} + x^{I_2} p_{I_2} + S_{J(h,j)}(x^J, p_J) \right\} [J_{J(h,j)}(x^J, p_J)]^{-1/2} \varphi_{(h,j)}(x^J, p_J) dx^{I_1} dp_{I_1} = I. \quad (2.15)$$

Применим к интегралу (2.15) формулу асимптотического разложения интеграла быстро осциллирующей функции:

$$I = \exp \left\{ \frac{i}{h} (-x^{I_1} p_{I_1} + x^{I_2} p_{I_2} + S_{J(h,j)}(x^{I_1}, x^{I_2}, p_{I_1}, p_{I_2})) \right\} \times \\ \times [\det \text{Hess}_{x^{I_1}, p_{I_1}} (-S_{J(h,j)}(x^{I_1}, x^{I_2}, p_{I_1}, p_{I_2}))]^{-1/2} \times \\ \times \sum_{k=0}^N W_k \{ [J_{J(h,j)}(x^{I_1}, x^{I_2}, p_{I_1}, p_{I_2})]^{-1/2} \times \\ \times \varphi_{(h,j)}(x^{I_1}, x^{I_2}, p_{I_1}, p_{I_2}) \} + O(h^N) \\ \text{при } x^{I_1} = x^{I_1}(x^J, p_J), \quad p_{I_1} = p_{I_1}(x^J, p_J), \quad \text{где } x^{I_1}, p_{I_1} - \text{решения системы уравнений}$$

$$-p_{I_1} + \frac{\partial S_{J(h,j)}}{\partial x^{I_1}}(x^{I_1}, x^{I_2}, p_{I_1}, p_{I_2}) = 0, \\ x^{I_2} + \frac{\partial S_{J(h,j)}}{\partial p_{I_2}}(x^{I_1}, x^{I_2}, p_{I_1}, p_{I_2}) = 0. \quad (2.16)$$

Как и ранее, проверяется, что решением системы (2.16) являются функции, определяющие замену координат от  $U_J$  к  $U_I$ . Далее, обычные вычисления приводят к формуле

$$I \equiv \exp \left\{ \frac{i}{h} x^{I_1} p_{I_1} + x^{I_2} p_{I_2} + S_J(x^{I_1}, x^{I_2}, p_{I_1}, p_{I_2}) - \right. \\ \left. - \frac{i}{2} \left( (\text{Arg } J)_{J(h,j)} + \sum_k \arg \lambda_k \right) \right\} [J_{J(h,j)}(x^J, p_J)]^{-1/2} \times \\ \times [J_{J(h,j)}(x^{I_1}, x^{I_2}, p_{I_1}, p_{I_2})]^{-1/2} \times \\ \times \sum_{k=0}^N \{ W_k [J_{J(h,j)}(x^{I_1}, x^{I_2}, p_{I_1}, p_{I_2})] \} \varphi_{(h,j)}(x^{I_1}, x^{I_2}, p_{I_1}, p_{I_2}), \quad (2.17)$$

причем все сравнения понимаются по модулю  $h^N$  равномерно по  $(h, j)$ ,  $h \in (0, 1]$ ,  $j \in J(h)$ .

Формула (2.17) вместе с соотношениями (2.9) показывает, что в качестве операторов  $V_{ik(j, h)}$  при каждом фиксированном  $h \in (0, 1]$ ,  $j \in J(h)$  можно взять операторы  $V_{ij}$ , определенные ранее.

Рассмотрим теперь некоторые свойства операторов  $V_{ik(j, h)}$ . Мы докажем соотношения

$$V_{ik(h, j)} V_{il(h, j)} \varphi \equiv \varphi \pmod{h^N}, \quad (2.18)$$

$$V_{il(h, j)} V_{kl(h, j)} \varphi \equiv V_{ik(h, j)} \varphi \pmod{h^N}.$$

Для этого рассмотрим карту  $U_i$  как лагранжево многообразие. Рассмотрим также его покрытие множествами  $V_i = U_i \cap U_i$ . В качестве коцепи  $S$  мы выберем коцепь  $\bar{S}_j = S_j + x^j p_j - x^j p_j$ . (Все рассуждения происходят при фиксированных  $(h, j)$ ,  $U_i$  — тип карты  $U_i$  при данных  $(h, j)$ .) Формула разложения интеграла быстро осцилирующей функции показывает, что операторы  $V_{ij}$ , отвечающие  $U_i$ , суть дифференциальные операторы с коэффициентами, зависящими лишь от производных функций  $S_j$ . Как было доказано, операторы  $V_{ij}$  удовлетворяют условиям (2.18). Далее, производные функций  $\bar{S}_j$  совпадают с производными функций  $S_j$  с точностью до  $O(h^N)$ . Это следует из формулы (2.8), если учесть соотношение

$$(\text{Arg } J)_I - (\text{Arg } J)_J - \sum_k \arg \lambda_k + |I_2| \pi = \text{const.}$$

Отсюда следует соотношение (2.18).

Определим теперь локальный канонический оператор в карте  $U_i$  формулой

$$K_{U_i} \varphi(h, j) = \sum_l K_{U_l} V_{il(h, j)} e_l \varphi(h, j),$$

$$\varphi(h, j) \in C_h^\infty(U_i) [h]_N. \quad (2.19)$$

Справедливы следующие утверждения.

Предложение 2.3. Ограничения операторов

$$K_{U_i}: C_h^\infty(U_i)[h]_N \rightarrow {}^N H^{1/h}(\mathbb{R}_x^n),$$

$$K_{U_i}: C_h^\infty(U_i)[h]_N \rightarrow {}^N H^{1/h}(\mathbb{R}_x^n).$$

на множество функций из  $C_h^\infty(U_i \cap U_l)[h]_N$  с носителем в пересечении  $U_i \cap U_l$  совпадают.

Теорема 2.4. Существует единственный оператор

$$K: C_h^\infty(L)[h]_N \rightarrow {}^N H^{1/h}(\mathbb{R}_x^n),$$

ограничения которого на функции из  $C_h^\infty(U_i)[h]_N$  с носителем в множестве  $U_i$  совпадают с операторами (2.19).

Доказательство этих утверждений полностью совпадает с доказательством соответствующих утверждений главы VI.

Перейдем теперь к формулировке теоремы о коммутации в случае лагранжевых пакетов.

Определение 2.7. Пакет  $\{L, J(h), i_{(h,j)}\}$  с мерой  $\mu_{(h,j)}$  называется ассоциированным с гамильтонианом  $H(x, p)$ , если существует такая система констант  $E_{(h,j)}$  (эти константы мы будем называть энергетическими уровнями), что

1)  $E_{(h,j)}$  равномерно ограничены по  $h \in (0, 1]$ ,  $j \in J(h)$ ;

2)  $i_{(h,j)}^* H(x, p) = E_{(h,j)}$ , и мера  $\mu_{(h,j)}$  инвариантна относительно векторного поля  $V(H)$ , т. е.

$$\mathcal{L}_{V(H)} \mu_{(h,j)} = 0. \quad (2.20)$$

Заметим, что требование (2.20) корректно, поскольку в силу леммы 1.2 главы II многообразие  $L$  инвариантно относительно  $V(H)$ .

Теорема 2.5. Пусть пакет  $\{L, J(h), i_{(h,j)}\}$  с мерой  $\mu_{(h,j)}$  ассоциирован с гамильтонианом  $H(x, p)$ . Тогда существует оператор

$$P: C_h^\infty(L)[h]_N \rightarrow C_h^\infty(L)[h]_N$$

такой, что  $P = \{P_{(h,j)}\}$ ,

$$H(x, \hat{p}) K \varphi_{(h,j)} \equiv -i h K P_{(h,j)} \varphi_{(h,j)} + E_{(h,j)} K \varphi_{(h,j)} \pmod{h^N} \quad (2.21)$$

для функций из  $C_h^\infty(L)[h]_N$ . При этом операторы  $P_{(h,j)}$  определяются локально при каждом  $(h, j)$  так же, как в § 6.2.

Доказательство проводится совершенно аналогично доказательству соответствующего утверждения для индивидуального лагранжева многообразия (§ 6.2).

3. Асимптотика спектра. В этом пункте мы докажем теорему о приближении спектра  $1/h$ -псевдодифференциального оператора  $\hat{H} = H(x, \hat{p})$ . При этом наложим некоторые требования на оператор  $\hat{H}$ .

**Теорема 2.6.** Пусть  $\{L, J(h), H_{(h,j)}\}$  — лагранжев пакет с мерой, ассоциированной с гамильтонианом  $H$ ;  $E_{(h,j)}$  — соответствующая система энергетических уровней. Пусть  $\varepsilon_{(h,j),k} = \sum \varepsilon_{(h,j)}^\sigma h^\sigma$ ,  $k \in \mathcal{K}$ , — система собственных значений оператора  $\mathcal{P}$ , отвечающая таким собственным функциям  $\varphi_{(h,j),k}$ , что нормы в  $L_2(\mathbb{R}^n)$  функции  $K\varphi_{(h,j),k}$  ограничены снизу положительной константой, не зависящей от  $h \in (0, 1]$  и  $j \in J(h)$ . Предположим, что

1) Числа  $\varepsilon_{(h,j),k}^\sigma$  ограничены равномерно по  $h \in (0, 1]$  и  $j \in J(h)$ .

2) Производные функции  $\varphi_{(h,j),k}$  по локальным координатам многообразия  $L$  равномерно ограничены по  $h \in (0, 1]$ ,  $j \in J(h)$ ,  $k \in \mathcal{K}$ .

3) Существуют такие положительные постоянные  $C$  и  $N$ , что

$$\|(H - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{C}{d^M},$$

где  $d$  — расстояние от точки  $\lambda$  до спектра  $\text{спес } \hat{H}$  оператора  $\hat{H}$ . Тогда существует такая константа  $C_2 > 0$ , что множество

$$\Lambda_h = \{\lambda \mid \lambda = E_{(h,j)} - i h \varepsilon_{(h,j),k}\}$$

лежит в  $C_1 h^{N/M}$ -окрестности множества  $\text{спес } \hat{H}$  при каждом  $h \in (0, 1]$ .

**Доказательство.** Применим оператор  $\hat{H}$  к функциям  $\varphi_{(h,j),k}$ . В силу (2.21) имеем

$$\begin{aligned} \hat{H} K \varphi_{(h,j),k} &= \\ &= H(x, \hat{p}) K \varphi_{(h,j),k} = E_{(h,j)} K \varphi_{(h,j),k} - i h K \varphi_{(h,j),k} + \psi_{(h,j),k} = \\ &= (E_{(h,j)} - i h \varepsilon_{(h,j),k} K \varphi_{(h,j),k}) + \psi_{(h,j),k}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Напомним, что

$$\psi_{(h,j),k} \in {}^N I H^{1/h}(\mathbb{R}_x^n).$$

В частности,

$$\|\psi_{(h,j),k}\|_{L_2(\mathbb{R}_x^n)} \leq \tilde{C} h^N \quad (2.23)$$

для некоторой константы  $\tilde{C}$ , не зависящей от  $(h, j)$  и  $k$ . Перепишем соотношение (2.22) в виде

$$[\hat{H} - (E_{(h,j)} - i h \varepsilon_{(h,j),k})] K \varphi_{(h,j),k} = \psi_{(h,j),k}. \quad (2.24)$$

Разобьем теперь множество  $\Lambda_h$  на две части:  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ , где  $\Lambda_1 = \Lambda_h \cap \text{спес } \hat{H}$ ,  $\Lambda_2 = \Lambda_h - \Lambda_1$ . Множество  $\Lambda_1$  лежит в любой окрестности спектра  $\text{спес } \hat{H}$ . Докажем, что существует такая константа  $C_1$ , что  $\Lambda_2$  лежит в  $C_1 h^{N/M}$ -окрестности множества  $\text{спес } \hat{H}$  при каждом  $h \in (0, 1]$ . Применяя оператор  $(H - (E_{(h,j)} - i h \varepsilon_{(h,j),k}))^{-1}$  к соотношению (2.24) и взяв норму левой и правой частей полученного соотношения, заключаем, что

$$C_2 \leq \|K \varphi_{(h,j),k}\|_{L_2} = \|[\hat{H} - (E_{(h,j)} - i h \varepsilon_{(h,j),k})]^{-1} \times \\ \times \|\psi_{(h,j),k}\|_{L_2} \leq \frac{C}{[d(\lambda, \text{спес } \hat{H})]^M} \tilde{C} h^N, \quad (2.25)$$

где на последнем шаге использована оценка (2.23). Из соотношения (2.25) получаем при любых  $j \in J(h)$ ,  $k \in B_h$  следующую оценку:

$$d(\lambda, \text{спес } \hat{H}) \leq \sqrt[M]{\frac{\tilde{C}\tilde{C}}{C_2}} h^{N/M}, \quad (2.26)$$

причем константы в неравенстве (2.26) не зависят от  $h \in (0, 1]$ ,  $j \in J(h)$ ,  $k \in B_h$ . Взяв точную верхнюю грань по  $\lambda \in \Lambda_2$  функции  $d(\lambda, \text{спес } \hat{H})$  в левой части неравенства (2.26) и замечая, что при  $\lambda \in \Lambda_1$   $d(\lambda, \text{спес } \hat{H}) = 0$ , получим

$$\sup d(\lambda, \text{спес } \hat{H}) \leq \sqrt[M]{\frac{\tilde{C}\tilde{C}}{C_2}} h^{N/M}.$$

Последнее соотношение при  $C_1 = \sqrt[M]{\frac{\tilde{C}\tilde{C}}{C_2}}$  доказывает теорему.

**Следствие.** Пусть выполнены условия теоремы 2.6 и, кроме того, все энергетические уровни  $E_{(h, 1)}$  лежат в области  $E$ , в которой оператор  $\hat{H}$  имеет чисто дискретный спектр при каждом  $h \in (0, 1]$ . Тогда множество  $\Lambda_h$  асимптотически приближает дискретный спектр оператора  $\hat{H}$  в области  $E$ .

4. Одно замечание о нахождении асимптотики собственных значений дифференциальных операторов. Как мы видели, построение асимптотики собственных значений (спектра) операторов Гамильтона методом канонического оператора Маслова состоит из двух этапов. Вначале из уравнений (условий) квантования находится нулевое приближение, затем оно уточняется с помощью собственных значений оператора переноса.

В практике, однако, встречается ситуация, когда спектр оператора переноса заполняет некоторое всюду плотное множество, в то время как спектр основного оператора Гамильтона дискретен. Это приводит к необходимости указания способа выделения дискретной серии значений оператора переноса. Впервые такого рода процедура была проведена Е. М. Воробьевым для случая спектра задачи Дирихле уравнения Лапласа в кольце. Е. М. Воробьев указал некоторое условие вида (2.30) (см. ниже), позволяющее отбирать конечную серию собственных значений оператора переноса. В теореме 2.6 получено условие, позволяющее осуществить указанный отбор для задач общего вида.

Следующий ниже пример показывает, как первые два требования приводят к выделению дискретной части спектра оператора переноса. Рассмотрим задачу

$$H\psi = E\psi$$

на собственные значения для оператора  $H(x, \hat{p})$  с гамильтонианом

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \{ (p_1^2 + x_1^2) + \lambda (p_2^2 + x_2^2) \}.$$

Здесь  $\lambda$  — некоторое число. Наиболее интересен случай, когда число  $\lambda$  иррационально. Дальнейшие рассуждения будут происходить при этом предположении. Гамильтоново векторное поле, отвечающее гамильтониану  $H$ ,

имеет вид

$$V(H) = p_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \lambda p_2 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^1 \frac{\partial}{\partial p_1} - \lambda x^2 \frac{\partial}{\partial p_2}.$$

Для построения системы лагранжевых многообразий, инвариантных относительно векторного поля  $V(H)$ , рассмотрим фазовый поток семейства многообразий  $M_{\rho, \sigma}^0$  вдоль поля  $V(H)$ :

$$\begin{aligned} x^1 &= \rho \cos \alpha, & x^2 &= \sigma, \\ p_1 &= \rho \sin \alpha, & p_2 &= 0, & \dim M_{\rho, \sigma}^0 &= 1. \end{aligned}$$

Решение системы Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= p_1, & \dot{x}^2 &= \lambda p_2, \\ \dot{p}_1 &= -x^1, & \dot{p}_2 &= -\lambda x^2 \end{aligned}$$

с начальными данными на многообразии  $M_{\rho, \sigma}^0$  имеет вид

$$\begin{aligned} x^1 &= x_0^1 \cos t + p_{10} \sin t, & x_0^1 &= \rho \cos \alpha, \\ p_1 &= -x_0^1 \sin t + p_{10} \cos t, & p_{10} &= \rho \sin \alpha, \\ x^2 &= x_0^2 \cos \lambda t + p_{20} \sin \lambda t, & x_0^2 &= \sigma, \\ p_2 &= -x_0^2 \sin \lambda t + p_{20} \cos \lambda t, & p_{20} &= 0. \end{aligned}$$

Перепишем эти уравнения следующим образом:

$$\begin{aligned} x^1 &= \rho (\cos \alpha \cos t + \sin \alpha \sin t) = \rho \cos (t - \alpha), \\ p_1 &= -\rho (\cos \alpha \sin t - \sin \alpha \cos t) = -\rho \sin (t - \alpha), \\ x^2 &= \sigma \cos \lambda t, & p_2 &= -\sigma \sin \lambda t. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Если считать параметры  $\alpha$  и  $t$  координатами, то уравнения (2.27) определяют систему двумерных лагранжевых многообразий  $M_{\rho, \sigma}$ , инвариантных относительно векторного поля  $V(H)$ .

Для выписывания условий квантования и последующего решения уравнения переноса полезно явно задать образующие фундаментальной группы  $\pi_1(M_{\rho, \sigma})$  многообразий  $M_{\rho, \sigma}$ . Так как многообразия  $M_{\rho, \sigma}$  гомеоморфны двумерному тору  $T^2$ , то  $\pi_1(M_{\rho, \sigma}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Следовательно, образующими этой группы являются:



1) цикл  $\gamma_1$ :

$$\begin{aligned}x^1 &= \rho \cos \alpha, & x^2 &= \sigma, \\p_1 &= \rho \sin \alpha, & p_2 &= 0;\end{aligned}$$

2) цикл  $\gamma_2$ :

$$\begin{aligned}x^1 &= \rho, & x^2 &= \sigma \cos \lambda t, \\p_1 &= 0, & p_2 &= -\sigma \sin \lambda t.\end{aligned}$$

Условия квантования дают

$$\rho_n^2 = h(2n+1) \quad \sigma_m^2 = h(2m+1),$$

поэтому

$$E_{mn} = h\{(n+1/2) + \lambda(m+1/2)\}.$$

Изучим теперь собственные значения оператора переноса. В координатах  $(t, \alpha)$  векторное поле  $V(H) = \partial/\partial t$  (равное оператору переноса  $\mathcal{P}$ ) есть  $\partial/\partial t$ . Уравнение на собственные функции и собственные значения оператора  $\partial/\partial t$  имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varepsilon \varphi.$$

Решая это уравнение, мы получаем, что

$$\varphi = C(\alpha) \exp(\varepsilon t),$$

где  $C(\alpha)$  —  $2\pi$ -периодическая функция.

Подберем функцию  $C(\alpha)$  так, чтобы функция  $\varphi(\alpha, t)$  была функцией на торе  $M_{p, \sigma}$ . Как нетрудно видеть из уравнений (2.27), в случае, если значение параметра  $t$  при постоянном значении  $\alpha$  изменяется на величину  $2\pi/\lambda$ , то цикл  $\gamma_1$  переходит в себя. При этом точка с координатой  $\alpha$  переходит в точку с координатой  $\alpha - 2\pi/\lambda$ . Условие однозначности функции  $\varphi(\alpha, t)$  на торе  $M_{p, \sigma}$  есть

$$\varphi(\alpha, t) = \varphi\left(\alpha - \frac{2\pi}{\lambda}, t + \frac{2\pi}{\lambda}\right).$$

Это приводит к уравнению для функции  $C(\alpha)$ :

$$C(\alpha) = C\left(\alpha - \frac{2\pi}{\lambda}\right) \exp\left(\frac{2\pi\varepsilon}{\lambda}\right),$$

которое можно переписать в виде

$$\exp\left\{i\left(i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\right\} C(\alpha) = \exp\left(-\frac{2\pi\varepsilon}{\lambda}\right) C(\alpha). \quad (2.28)$$

Поэтому функция  $C(\alpha)$  должна быть собственной функцией оператора сдвига  $\exp \left\{ i \left( i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \right\}$ .

Собственные функции такого оператора совпадают с собственными функциями оператора  $i\partial/\partial\alpha$ , а собственные значения получаются из собственных значений  $z$  оператора  $i\partial/\partial\alpha$  подстановкой в функцию  $\exp \left\{ i \frac{2\pi}{\lambda} z \right\}$ . Поэтому

$$C_s(\alpha) = \exp(is\alpha), \quad k_s = \exp \left\{ -i \frac{2\pi s}{\lambda} \right\}, \quad s \in \mathbf{Z}.$$

С другой стороны, по формуле (2.28) собственные значения оператора сдвига равны  $\exp \left\{ -\frac{2\pi \varepsilon}{\lambda} \right\}$ . Поэтому

$$\exp \left\{ -i \frac{2\pi s}{\lambda} \right\} = \exp \left\{ -\frac{2\pi \varepsilon}{\lambda} \right\}$$

и для собственных значений оператора переноса получается следующее соотношение:

$$\frac{2\pi \varepsilon}{\lambda} = \frac{2\pi i}{\lambda} s + 2\pi i q,$$

или

$$\varepsilon_{sq} = i(s + \lambda q), \quad s \in \mathbf{Z}, \quad q \in \mathbf{Z}. \quad (2.29)$$

Точки  $\{\varepsilon_{sq}\}$  при  $s, q \in \mathbf{Z}$  образуют всюду плотное на оси  $\mathbf{R}$  множество. Однако при больших  $s$  производные по переменной  $\alpha$  функции  $C_s(\alpha) = \exp(is\alpha)$  велики и поэтому система собственных функций

$$\varphi_{s,q}(\alpha, t) = C_s(\alpha) \exp(\varepsilon_{sq}t) = \exp(is\alpha) \exp\{i(s + \lambda q)t\}$$

не обладает ограниченными равномерно по переменным  $s, \alpha$  производными, если значение  $s$  неограничено. Поэтому необходимо потребовать, чтобы  $|s| \leq A$ , где  $A$  — константа. Далее, поскольку числа  $|\varepsilon_{sq}|$  должны быть ограничены, то из соотношений (2.29) с необходимостью следует, что

$$s = O(1), \quad q = O(1) \quad (2.30)$$

и, следовательно, всюду плотное множество исчезает. Асимптотика собственных значений при этом имеет вид

$$\begin{aligned} E_{mn} - ih_{z_{sq}} &= h(n+1/2) + \lambda h(m+1/2) + h(s+\lambda q) = \\ &= h[(n+s)+1/2] + \lambda h[(m+q)+1/2], \end{aligned} \quad (2.31)$$

где целые числа  $n$  и  $m$  подбираются так, чтобы

$$0 < E_1 \leq E_{mn} \leq E_2 < +\infty. \quad (2.32)$$

Заметим, что последнее требование является весьма существенным. Если его не ввести, то по формуле (2.31) можно получить отрицательные значения для положительно определенного оператора, что абсурдно. При  $s=q=O(1)$  это уже не так. Действительно, в этом случае при малых значениях параметра  $h$  правая часть в формуле (2.31) всегда положительна в силу неравенства (2.32) для  $E_{mn}$  и условия  $s, q=O(1)$ .

Резюмируем результаты разобранных примеров. В некоторых случаях спектр оператора переноса может образовывать плотное на оси  $\mathbb{R}$  множество. Однако собственные функции, отвечающие таким собственным значениям, не будут ограничены в совокупности равномерно по системе параметров, определяющей собственные значения. Следствием этого является неравномерность оценки расстояния от приближенного спектра до точного. Это обусловлено тем обстоятельством, что в остаточный член входят производные собственных функций оператора переноса не только по параметру траектории гамильтоновой системы, но и по трансверсальным координатам. При выделении подсистемы собственных значений, собственные функции которых ограничены в совокупности, происходит «раздискретивание» спектра; из всюду плотного спектра оператора переноса выделяется подсистема собственных значений, которая уже не является всюду плотной.

Несмотря на то, что эти выводы сделаны на основании рассмотрения конкретного примера, они остаются в силе и для общего класса задач. Например, все сказанное верно, если уравнение

$$H(x, \hat{p})\psi = \overline{E}\psi$$

имеет дискретный спектр при каждом значении параметра  $h$ . При этом, если расстояние между точками спектра

имеет порядок  $O(h^m)$ , нужно рассматривать оператор переноса  $\mathcal{P}$ , выписанный до  $m-1$  члена по  $h$ :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 + h\mathcal{P}_1 + \dots + h^{m-1}\mathcal{P}_{m-1}.$$

Это замечание непосредственно следует из теоремы 2.6. В самом деле, если, например, расстояние между точками спектра было бы пропорционально  $h$ , спектр оператора  $\mathcal{P}_0$  всюду плотен на оси и собственные функции, отвечающие спектру, ограничены в совокупности, то множество

$$E_{(h,j)} + ih\varepsilon_{(h,j),k} \quad (2.33)$$

приближало бы спектр. Выбрав в неравенстве

$$|\varepsilon_{(h,j),k}| < C$$

константу  $C$  достаточно большой, мы получили бы, что множество (2.33) всюду плотно в отрезке  $[E_1, E_2]$ . С другой стороны, по теореме 2.6 в  $Ch^2$ -окрестности любой точки этого множества лежит хотя бы одна точка спектра. Это противоречит тому, что расстояние между точками спектра пропорционально  $h$ .

### § 8.3. Системы уравнений

В этом параграфе мы построим теорию канонического оператора Маслова, пригодную для нахождения асимптотических решений для случая систем уравнений, а также для случая, когда коэффициенты гамильтониана суть операторы. Этот последний случай встречается, например, в задачах квантовой химии.

Параграф разделен на две части. В первой изучена конечномерная ситуация, во второй — бесконечномерная. Построение теории осуществляется следующим образом. Считая матрицу (оператор) симметрической (самосопряженным), мы рассматриваем каждое собственное значение (терм) как гамильтониан, строим для него канонический оператор и устанавливаем теорему о коммутации. При этом мы предполагаем, что термы не пересекаются (хотя и могут быть кратными). Другими словами, мы рассматриваем системы с характеристиками постоянной кратности. Случай, когда кратность характеристик меняется, несравненно сложнее.

## 1. Конечномерная ситуация. Пусть

$$L_h(x, p, h): E^m \rightarrow E^m \quad (3.1)$$

— гладкое семейство конечномерных операторов (т. е. матриц), действующих в  $m$ -мерном арифметическом пространстве  $E^m$ .

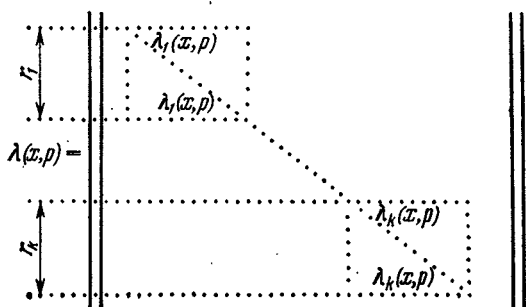
Коммутация с оператором Гамильтона. Предположим, что оператор  $L_h = L_h(x, p, h)$  имеет вид

$$L_h = \lambda(x, p) + hL_1(x, p, h) + O(h^N), \quad (3.2)$$

где  $\lambda(x, p)$  — диагональная матрица:

$$\lambda(x, p) = \text{diag}(\lambda_1(x, p) \otimes \text{id}_{r_1}, \dots, \lambda_k(x, p) \otimes \text{id}_{r_k}). \quad (3.3)$$

Таким образом,



Любая из функций  $\lambda_i(x, p)$ ,  $i=1, \dots, k$ , являющаяся собственным значением матрицы  $\lambda(x, p)$ , называется гамильтонианом или термом.

Обозначим через  $K_i$ ,  $i=1, \dots, k$ , канонические операторы, ассоциированные с термами  $\lambda_i(x, p)$ ,  $i=1, \dots, k$ . Легко видеть, что в частном случае, когда в разложении отсутствует второй член, т. е. выполнено сравнение \*)

$$L_1 \equiv 0 \pmod{h^N}, \quad N > 1, \quad (3.4)$$

для оператора

$$K_0 = \text{diag}(K_1 \otimes \text{id}_{r_1}, \dots, K_k \otimes \text{id}_{r_k}) \quad (3.5)$$

\*) То есть следующее ниже сравнение справедливо для любой функции  $\varphi: C^\infty_0(\mathbb{R}^n) \rightarrow E^m$ .

имеет место следующая формула коммутации:

$$\hat{L}_h K_0 \varphi = L_h(x, \hat{p}, h) K_0 \varphi \equiv -ih K_0 \mathcal{P} \varphi \pmod{h^N}. \quad (3.6)$$

В этой формуле

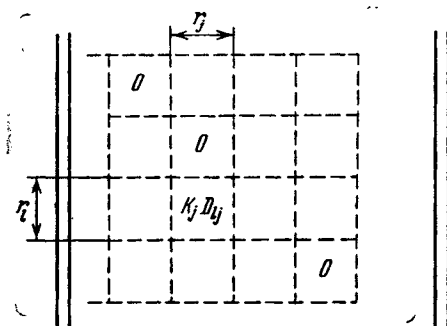
$$\mathcal{P} = \text{diag}(\mathcal{P}_1 \otimes \text{id}_{r_1}, \dots, \mathcal{P}_k \otimes \text{id}_{r_k}) \quad (3.7)$$

— диагональная матрица, а  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$  — операторы переноса, отвечающие термам  $\lambda_1(x, p), \dots, \lambda_k(x, p)$  соответственно.

В случае, когда оператор  $L_1(x, p, h)$  не удовлетворяет условию (3.4), формула (3.6) уже не верна. Теория возмущений, однако, подсказывает, что нужный оператор  $K_h$  следует искать в виде

$$K_h = K_0 + h K'. \quad (3.8)$$

При этом оператор  $K'$  имеет вид



$$(3.9)$$

так что в матрице (3.9) на диагонали стоят нули, а в клетке с индексом  $(l_j)$  размера  $(r_i \times r_j)$ ,  $l \neq j$ , стоит композиция  $K_j \circ D_{ij}$  дифференциальных операторов

$$D_{ij} = D_{ij}^0 + h D_{ij}^1 + \dots + h^N D_{ij}^N$$

с неопределенными коэффициентами и канонического оператора  $K_j$ .

Применим оператор (3.2) к оператору (3.8), а затем используем формулу коммутации (3.6). В результате получим, что можно так подобрать операторы  $D_{ij}$ , чтобы формула

$$\hat{L}_h K_h = -ih K_0 G \pmod{h^N} \quad (3.10)$$

была справедлива в том и только в том случае, когда

$$i_l \lambda_j \neq 0, \quad l, j = 1, \dots, n, \quad l \neq j \quad (3.11)$$

Здесь  $i_l: L_l \rightarrow \Phi$  — лагранжевы вложения. Более того, прямой подсчет показывает, что главная часть  $G_0$  оператора  $G$  имеет вид

$$G_0 = \text{diag} (\dots, (\mathcal{P}_l + i_l^* L_{li}) \otimes \text{id}_{r_l} \dots), \quad (3.12)$$

где  $L_{li}$  — матричные элементы оператора  $L_h(x, p, h)$ .

Коммутация с оператором Гамильтона произвольного вида. Пусть  $L_h(x, p, h)$  — оператор в  $E^m$ , и пусть  $L_0(x, p) = L(x, p, 0)$  — его главная часть.

**Теорема 3.1.** Пусть семейство  $L_0(x, p)$  имеет полный набор собственных векторов  $\chi(x, p), \dots, \chi(x, p)$ , отвечающих термам  $\lambda_1(x, p), \dots, \lambda_h(x, p)$ , и пусть  $\chi(x, p)$  — матрица, столбцами которой служат координаты собственных векторов в пространстве  $E^m$ . Если выполнено условие (3.11), то для оператора

$$K_h = \hat{\chi} K_h \quad (3.13)$$

имеет место сравнение

$$\hat{L}_h K_h \equiv -ih \hat{\chi} K_0 G \pmod{h^N}. \quad (3.14)$$

**Замечание.** Оператор  $\hat{\chi}$  обладает тривиальным ядром.

**Доказательство теоремы 3.1.** Определим оператор  $\hat{L}_1$  из равенства

$$\hat{L}_h \hat{\chi} \equiv \hat{\chi} (\hat{\lambda}_0 + h \hat{L}_1) \pmod{h^N}, \quad (3.15)$$

где  $\hat{\lambda}_0 = \text{diag} (\dots, \hat{\lambda}_l \otimes \text{id}_{r_l}, \dots)$ .

Тогда в силу (3.13) выполнено равенство  $\hat{L} K_h \equiv \hat{L} \hat{\chi} K_h \pmod{h^N}$ ; далее, применяя формулы (3.15) и (3.14), получаем, что

$$\hat{L} K_h = \hat{\chi} (\hat{\lambda}_0 + h \hat{L}_1) K_h \equiv -ih \hat{\chi} K_0 G \pmod{h^N}.$$

Теорема доказана.

**2. Бесконечномерная ситуация.** Пусть  $H$  — гильбертово пространство, скалярное произведение

в котором мы будем обозначать скобками  $(,)$ . В пространстве  $H$  мы рассмотрим оператор \*)

$$L_0(x, p): H \rightarrow H \quad (3.16)$$

и предположим, что он имеет изолированное собственное значение  $\lambda(x, p) \in \mathbb{R}$  конечной постоянной кратности  $r$ . Пусть, далее,  $L_0^+(x, p)$  — сопряженный \*\*) к  $L_0(x, p)$  оператор, имеющий собственное значение  $\lambda(x, p)$  той же кратности.

Мы предположим, что в пространствах

$$\chi_\lambda = \text{Ker} [L_0(x, p) - \lambda(x, p)I] = \text{Ker} L_\lambda, \quad (3.17)$$

$$\chi_\lambda^+ = \text{Ker} [L_0^+(x, p) - \lambda(x, p)I] = \text{Ker} L_\lambda^+ \quad (3.18)$$

( $I$  — тождественный оператор) можно выбрать в качестве базиса собственные векторы

$$\chi_1, \dots, \chi_r \quad (3.19)$$

$$\chi_1^+, \dots, \chi_r^+ \quad (3.20)$$

операторов  $L_0$  и  $L_0^+$  соответственно.

Более того, мы будем считать, что базисы (3.19) и (3.20) ортогональны:

$$(\chi_i, \chi_j^+) = \delta_{ij}, \quad (3.21)$$

а базис (3.19) ортонормирован:

$$(\chi_i, \chi_j) = \delta_{ij}.$$

Обозначим через  $H_\lambda^+(x, p)$  ортогональное дополнение пространства  $\chi_\lambda^+(x, p)$  в  $H$ :

$$H_\lambda^+(x, p) \oplus \chi_\lambda^+(x, p) = H.$$

**Л е м м а 3.2.** *Имеет место следующее соотношение:*

$$H_\lambda^+ \cap \chi_\lambda = 0. \quad (3.22)$$

\*) Для краткости гладкие семейства  $L_0(x, p)$  мы будем называть *операторами*.

\*\*) Относительно скалярного произведения  $(,)$ .



Доказательство. Из включений

$$h \in H_{\lambda}^+, \quad h \in \chi_{\lambda}, \quad h \neq 0, \quad (3.23)$$

следует, что

$$h = a^i \chi_i, \quad a^i \in \mathbb{R}, \quad (3.24)$$

и при этом для некоторого  $k$  число  $a^k \neq 0$ . Умножая скалярно равенство (3.24) на  $\chi_k^+$ , мы в силу (3.21) получим

$$(h, \chi_k^+) = a^k, \quad (3.25)$$

т. е. вектор  $h$  имеет ненулевую компоненту в  $\chi_{\lambda}^+$ . Поскольку  $\chi_{\lambda}^+ \perp H_{\lambda}^+$ , то вектор  $h = 0$ .

Л е м м а 3.3. Для произвольного вектора  $\varphi \in H$  имеет место следующее разложение:

$$\varphi = \varphi_{\chi_{\lambda}} + \varphi_{H_{\lambda}^+}, \quad \varphi_{\chi_{\lambda}} \in \chi_{\lambda}, \quad \varphi_{H_{\lambda}^+} \in H_{\lambda}^+. \quad (3.26)$$

Доказательство. Если не всякий вектор разлагается в сумму (3.26), то в силу замкнутости пространств  $\chi_{\lambda}$  и  $H_{\lambda}^+$  найдется вектор  $h \neq 0$ , ортогональный пространству сумм вида (3.26). Разложим вектор  $h$  в сумму векторов

$$h = h_{\chi_{\lambda}} + h_{H_{\lambda}^+}, \quad h_{\chi_{\lambda}} \in \chi_{\lambda}, \quad h_{H_{\lambda}^+} \in H_{\lambda}^+, \quad (3.27)$$

и рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{aligned} 0 &= (h, \varphi_{\chi_{\lambda}} + \varphi_{H_{\lambda}^+}) = (\text{согласно (3.27)}) = \\ &= (h_{\chi_{\lambda}} + h_{H_{\lambda}^+}, \varphi_{\chi_{\lambda}} + \varphi_{H_{\lambda}^+}) = (h_{\chi_{\lambda}}, \varphi_{\chi_{\lambda}}) + (h_{H_{\lambda}^+}, \varphi_{\chi_{\lambda}}) + \\ &\quad + (h_{\chi_{\lambda}}, \varphi_{H_{\lambda}^+}) + (h_{H_{\lambda}^+}, \varphi_{H_{\lambda}^+}). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Из определения пространств  $\chi_{\lambda}^+$  и  $H_{\lambda}^+$  и в силу леммы 3.2 второе и третье слагаемые в сумме (3.28) исчезают.

Предположим теперь, что

$$h_{\chi_{\lambda}^+} \neq 0. \quad (3.29)$$

Тогда, полагая  $\varphi_{\chi_{\lambda}} = h_{\chi_{\lambda}^+}$ ,  $\varphi_{H_{\lambda}^+} = 0$ , мы получим, что

$$(h_{\chi_{\lambda}^+}, h_{\chi_{\lambda}^+}) = 0, \quad (3.30)$$

что противоречит предположению (3.29). Если же  $h_{x_\lambda}^+ = 0$ , то в силу (3.27), (3.28)

$$h_{H_\lambda}^+ \neq 0. \quad (3.31)$$

Полагая  $\varphi_{H_\lambda}^+ = h_{H_\lambda}^+$ ,  $\varphi_{x_\lambda} = 0$ , получим

$$(h_{H_\lambda}^+, h_{H_\lambda}^+) = 0, \quad (3.32)$$

что противоречит (3.31).

**Следствие.** Из леммы 3.2 и леммы 3.3 следует, что  $H = H_\lambda^+ \oplus x_\lambda$ .

**Лемма 3.4.** *Определен оператор*

$$L_0(x, p) : H_\lambda^+ \rightarrow H_\lambda^+. \quad (3.33)$$

**Доказательство.** Достаточно показать, что для любого вектора  $h_\lambda^+ \in H_\lambda^+$  и любого вектора  $x_\lambda^+ \in x_\lambda^+$  выполнено соотношение

$$(L_0(x, p) h_\lambda^+, x_\lambda^+) = 0. \quad (3.34)$$

Имеем

$$(L_0(x, p) h_\lambda^+, x_\lambda^+) = (h_\lambda^+, L_0^+(x, p) x_\lambda^+) = \lambda (h_\lambda^+, x_\lambda^+) = 0. \quad (3.35)$$

**Предложение 3.5.** Пусть в некоторой точке  $(x_0, p_0)$

$$\lambda(x_0, p_0) = 0. \quad (3.36)$$

Тогда оператор

$$L_0(x, p) : H_0^+(x_0, p_0) \rightarrow H_0^+(x_0, p_0) \quad (3.37)$$

является изоморфизмом.

**Доказательство.** а) Мономорфность. Пусть

$$L_0(x_0, p_0) \varphi = 0, \quad (3.38)$$

$$\varphi \in H_0^+(x_0, p_0). \quad (3.39)$$

Тогда из (3.38) следует, что

$$\varphi \in x_0(x_0, p_0), \quad (3.40)$$

и из леммы 3.2 следует, что  $\varphi = 0$ .

б) Эпиморфность. Заметим прежде всего, что поскольку 0 — изолированная точка спектра оператора  $L_0(x, p)$ , последний имеет замкнутую область значений. Поэтому

$$\text{Coker } L_0(x_0, p_0) = \ker L_0^+(x_0, p_0) = \chi_0^+(x_0, p_0). \quad (3.41)$$

Поскольку

$$\chi_0^+ \cap H_0^+ = 0, \quad (3.42)$$

то эпиморфность оператора  $L_0(x_0, p_0)$  доказана.

Определим теперь канонический оператор

$$K_\lambda: C_0^\infty(M_\lambda) \rightarrow H^{1/h}_1(\mathbb{R}^n), \quad (3.43)$$

ассоциированный с гамильтонианом  $\lambda(x, p)$ . Здесь  $M_\lambda$  — лагранжево многообразие, лежащее на нулевой поверхности уровня гамильтониана  $\lambda(x, p)$ . Сужение оператора (3.43) на собственное подпространство  $\chi_\lambda$  в силу соотношений

$$[L_0(x, p) - \lambda(x, p)]\varphi = 0, \quad \varphi \in \chi_\lambda, \quad (3.44)$$

$$i_\lambda^* \lambda(x, p) = 0 \quad (3.45)$$

приводит к следующей формуле коммутации в произвольной канонической карте  $U_I$ :

$$\hat{L}K_\lambda(U_I)\varphi_I \equiv -ihK_\lambda(U_I)V_I\varphi. \quad (3.46)$$

К сожалению, функция  $V_I\varphi$ , вообще говоря, не принадлежит пространству  $\chi_\lambda$ , и чтобы получить формулу вида (3.46) для сужения оператора  $K_\lambda$  на  $\chi_\lambda$ , мы исправим его следующим образом. Обозначим через

$$P_{\chi_\lambda}: H \rightarrow \chi_\lambda, \quad (3.47)$$

$$P_{H_\lambda^+}: H \rightarrow H_\lambda^+$$

проекторы. Очевидно, что  $P_{\chi_\lambda} \oplus P_{H_\lambda^+} = \text{id}_H$ . Тогда для  $\varphi \in H$  имеем (индекс  $I$  у  $V$  опускаем)

$$V\varphi = P_{\chi_\lambda}V\varphi + P_{H_\lambda^+}V\varphi \stackrel{\text{def}}{=} G_\lambda\varphi + P_{H_\lambda^+}V\varphi. \quad (3.48)$$

Будем искать нужный нам оператор  $\tilde{K}_\lambda$  в виде

$$\tilde{K}_\lambda = K_\lambda (1 - \hbar DP_{H_\lambda^+}), \quad (3.49)$$

где оператор

$$D: H_\lambda^+ \rightarrow H_\lambda^+ \quad (3.50)$$

— неизвестное пока отображение. Имеем

$$\begin{aligned} L\tilde{K}_\lambda\varphi &= LK_\lambda - \hbar LK_\lambda DP_{H_\lambda^+} \equiv_{\text{mod } \hbar^N} - \hbar K_\lambda G\varphi - \\ &\quad - \hbar K_\lambda P_{H_\lambda^+} V\varphi - \hbar LK_\lambda DP_{H_\lambda^+} \varphi = \\ &= - \hbar K_\lambda G\varphi - \hbar K_\lambda P_{H_\lambda^+} V\varphi - \hbar K_\lambda V_1 DP_{H_\lambda^+} \varphi. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Теперь оператор  $D$  можно найти из уравнения

$$-iP_{H_\lambda^+} V = V_1 DP_{H_\lambda^+},$$

поскольку  $V_1 = L_0 + \hbar V_2$ .

Вычислим \*) главный член  $\mathcal{P}_0$  оператора  $\mathcal{P}$ :

$$\mathcal{P}: C_0^\infty(M_\lambda, \chi_\lambda) \rightarrow C_0^\infty(M_\lambda, \chi_\lambda). \quad (3.52)$$

Из леммы о коммутации быстро осциллирующей экспоненты и оператора Гамильтона, которая доказывается дословным повторением рассуждений скалярного случая, следует, что оператор  $U_1$  при  $\hbar^1$  в разложении функции

$$H_I(x^I, \hat{x}^I, \hat{p}_I, p_I) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_I\right) \varphi \quad (3.53)$$

равен

$$\begin{aligned} U_1\varphi &= \frac{\partial L_0}{\partial x^I} \frac{\partial \varphi}{\partial p_I} - \frac{\partial L_0}{\partial p_I} \frac{\partial \varphi}{\partial x^I} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 S_I}{\partial p_I \partial p_I} \frac{\partial^2 L_0}{\partial x^I \partial x^I} + \frac{\partial^2 S_I}{\partial x^I \partial x^I} \frac{\partial^2 L_0}{\partial p_I \partial p_I} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\partial^2 S_I}{\partial x^I \partial p_I} \frac{\partial^2 L_0}{\partial x^I \partial p_I} - 2 \frac{\partial^2 L_0}{\partial x^I \partial p_I} \right) \varphi - iL_1\varphi. \end{aligned} \quad (3.54)$$

\*) Мы используем любезно предоставленные нам В. П. Масловым (неопубликованные) записки его лекций.

Обозначим  $L_\lambda = [L_0 - \lambda I](x, p)$ . Тогда

$$U_1 \varphi = \frac{\partial L_\lambda}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{\bar{I}}} - \frac{\partial L_\lambda}{\partial p_I} \frac{\partial \varphi}{\partial x^I} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 S_I}{\partial p_{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x^{\bar{I}} \partial x^I} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 S_I}{\partial x^I \partial x^I} \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial p_I \partial p_I} - 2 \frac{\partial^2 S_I}{\partial x^I \partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x^{\bar{I}} \partial p_I} - 2 \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x^{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} \right) \varphi - i L^1 \varphi + U'_1 \varphi. \quad (3.55)$$

Здесь  $U'_1 \varphi$  — выражение, аналогичное первому слагаемому в (3.54), но с заменой выражения  $L_\lambda$  на  $\lambda$ . Положим теперь

$$\varphi = \chi(x, p) \sqrt{\mu_I}, \quad (3.56)$$

где  $\chi(x, p) \in \chi$ . Имеем

$$U'_1 \mu_I^{+1/2} = -\frac{d}{d\tau} \mu_I^{+1/2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 S_I}{\partial p_{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} + \dots \right) \mu_I^{+1/2}. \quad (3.57)$$

Поэтому

$$\mu_I^{-1/2} U'_1 \varphi = \\ = \mu_I^{-1/2} U'_1 \mu_I^{+1/2} \chi = -\frac{d\chi}{d\tau} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 S_I}{\partial p_{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} + \dots \right) \chi + \\ + \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \ln \mu_I = \left[ -\frac{d}{d\tau} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 S_I}{\partial p_{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} + \dots \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial p_{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} + \dots \right) \right] \chi = \left[ -\frac{d}{d\tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial p} \right] \chi. \quad (3.58)$$

Далее,

$$\frac{\partial L_\lambda}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \varphi}{\partial p_{\bar{I}}} - \frac{\partial L_\lambda}{\partial p_I} \frac{\partial \varphi}{\partial x^I} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial x^{\bar{I}}} \left( \frac{\partial}{\partial p_{\bar{I}}} \mu_I^{+1/2} \right) \chi - \\ - \frac{\partial L_\lambda}{\partial p_I} \left( \frac{\partial}{\partial x^I} \mu_I^{+1/2} \right) \chi + \mu_I^{+1/2} \left( \frac{\partial L_\lambda}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{d\chi}{dp_{\bar{I}}} - \frac{\partial L_\lambda}{\partial p_I} \frac{d\chi}{dx^I} \right). \quad (3.59)$$

Первые два слагаемых в (3.59) удовлетворяют сравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial p_{\bar{I}}} \mu_I^{+1/2}\right) \frac{\partial L_\lambda}{\partial x^{\bar{I}}} \chi \equiv 0 \pmod{R(L_0)}. \quad (3.60)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^I} \mu_I^{+1/2}\right) \frac{\partial L_\lambda}{\partial p_I} \chi \equiv 0 \pmod{R(L_0)}. \quad (3.61)$$

В формулах (3.60), (3.61) через  $R(L_0)$  обозначен образ оператора  $R_0$ . Итак,

$$\begin{aligned} U_1 \varphi = \mu_I^{+1/2} & \left\{ \left( \frac{\partial L_\lambda}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{d\chi}{dp_{\bar{I}}} - \frac{\partial L_\lambda}{\partial p_I} \frac{d\chi}{dx^I} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial p_{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} + \dots \right) \chi - \frac{d\chi}{d\tau} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial p} \chi \Big\} = \mu_I^{+1/2} \left\{ \left( \frac{\partial L_0}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{d\chi}{dp_{\bar{I}}} - \frac{\partial L_0}{\partial p_I} \frac{d\chi}{dx^I} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial p_{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} + \dots \right) \chi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial p} \chi \right\}. \quad (3.62) \end{aligned}$$

Далее, используя равенство

$$dS_I = p_I dx^I - x^{\bar{I}} dp_{\bar{I}}, \quad (3.63)$$

получим

$$\frac{d\chi}{dp_{\bar{I}}} = \frac{\partial \chi}{\partial p_{\bar{I}}} + \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial x^{\bar{I}}}{\partial p_{\bar{I}}} + \frac{\partial \chi}{\partial p_I} \frac{\partial p_I}{\partial p_{\bar{I}}} = \frac{\partial \chi}{\partial p_{\bar{I}}} - \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial^2 S_I}{\partial p_{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} + \frac{\partial \chi}{\partial p_I} \frac{\partial^2 S_I}{\partial x^I \partial p_{\bar{I}}}, \quad (3.64)$$

$$\frac{d\chi}{dx^I} = \frac{\partial \chi}{\partial x^I} + \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial x^{\bar{I}}}{\partial x^I} + \frac{\partial \chi}{\partial p_I} \frac{\partial p_I}{\partial x^I} = \frac{\partial \chi}{\partial x^I} - \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial^2 S_I}{\partial p_{\bar{I}} \partial x^I} + \frac{\partial \chi}{\partial p_I} \frac{\partial^2 S_I}{\partial x^I \partial x^I}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} U_1 \varphi = \mu_I^{+1/2} & \left\{ \left( \frac{\partial L_0}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial p_{\bar{I}}} - \frac{\partial L_0}{\partial p_I} \frac{\partial \chi}{\partial x^I} \right) - \frac{\partial^2 S_I}{\partial p_{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} \left( \frac{\partial L_0}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x^{\bar{I}} \partial x^{\bar{I}}} \right) + \right. \\ & + \frac{\partial^2 S_I}{\partial x^I \partial x^I} \left( - \frac{\partial L_0}{\partial p_I} \frac{\partial \chi}{\partial p_I} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial p_I \partial p_I} \right) + \frac{\partial L_0}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial p_I} \frac{\partial^2 S_I}{\partial x^I \partial p_{\bar{I}}} + \\ & + \frac{\partial L_0}{\partial p_I} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial^2 S_I}{\partial x^I \partial p_{\bar{I}}} + \left( \frac{\partial^2 S_I}{\partial x^I \partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x^{\bar{I}} \partial p_I} + \frac{\partial^2 L_\lambda}{\partial x^{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} \right) \chi + \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial p} \chi - iL_1 \right\}. \quad (3.65) \end{aligned}$$

Продифференцируем теперь тождество

$$L_{\lambda}(x, p)\chi(x, p) = 0. \quad (3.66)$$

Имеем

$$\frac{\partial^2 L_{\lambda}}{\partial x^{\bar{I}} \partial x^{\bar{I}}} \chi + \frac{\partial L_{\lambda}}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} + \frac{\partial L_{\lambda}}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} \equiv 0, \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial^2 L_{\lambda}}{\partial p_I \partial p_I} \chi + \frac{\partial L_{\lambda}}{\partial p_I} \frac{\partial \chi}{\partial p_I} + \frac{\partial L_{\lambda}}{\partial p_I} \frac{\partial \chi}{\partial p_I} \equiv 0, \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial^2 L_{\lambda}}{\partial x^{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} \chi + \frac{\partial L_{\lambda}}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial p_{\bar{I}}} + \frac{\partial L_{\lambda}}{\partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} \equiv 0, \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial^2 L_{\lambda}}{\partial x^{\bar{I}} \partial p_I} \chi + \frac{\partial L_{\lambda}}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial p_I} + \frac{\partial L_{\lambda}}{\partial p_I} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} \equiv 0, \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial^2 L_{\lambda}}{\partial x^{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} \chi + \frac{\partial L_{\lambda}}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial p_{\bar{I}}} + \frac{\partial L_{\lambda}}{\partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} \equiv 0. \quad (3.71)$$

В формулах (3.67) — (3.71) все сравнения рассматриваются по модулю  $R(L_0)$ . Поэтому (индекс  $I$  у  $S$  опускаем)

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial L_0}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L_{\lambda}}{\partial x^{\bar{I}} \partial x^{\bar{I}}} \chi \right] \frac{\partial^2 S}{\partial p_{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} = \\ & = \frac{\partial^2 S}{\partial p_{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} \left[ \frac{\partial L_0}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} - \frac{1}{2} \frac{\partial L_{\lambda}}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} - \frac{1}{2} \frac{\partial L_{\lambda}}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} \right] = \\ & = \frac{\partial^2 S}{\partial p_{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} \right), \\ & - \left[ \frac{\partial L_0}{\partial p_I} \frac{\partial \chi}{\partial p_I} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L_{\lambda}}{\partial p_I \partial p_I} \chi \right] \frac{\partial^2 S}{\partial x^{\bar{I}} \partial x^{\bar{I}}} = \\ & = - \left( \frac{\partial L_0}{\partial p_I} \frac{\partial \chi}{\partial p_I} - \frac{1}{2} \frac{\partial L_{\lambda}}{\partial p_I} \frac{\partial \chi}{\partial p_I} - \frac{1}{2} \frac{\partial L_{\lambda}}{\partial p_I} \frac{\partial \chi}{\partial p_I} \right) \times \\ & \quad \times \frac{\partial^2 S}{\partial x^{\bar{I}} \partial x^{\bar{I}}} = - \frac{\partial \lambda}{\partial p_I} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial^2 S}{\partial x^{\bar{I}} \partial x^{\bar{I}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 S}{\partial x^I \partial p_{\bar{I}}} \left[ \frac{\partial^2 L_{\lambda}}{\partial x^{\bar{I}} \partial p_I} + \frac{\partial L_0}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial p_I} + \frac{\partial L_0}{\partial p_I} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} \right] = \\
& = \frac{\partial^2 S}{\partial x^I \partial p_{\bar{I}}} \left( - \frac{\partial L_{\lambda}}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial p_I} - \frac{\partial L_{\lambda}}{\partial p_I} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} + \frac{\partial L_0}{\partial p_I} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} + \frac{\partial L_0}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial p_I} \right) = \\
& = \frac{\partial^2 S}{\partial x^I \partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial \lambda}{\partial p_I} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^I \partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial \lambda}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial p_I}, \\
& - \frac{\partial L_{\lambda}}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial p_{\bar{I}}} - \frac{\partial L_{\lambda}}{\partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} + \frac{\partial L_0}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial p_{\bar{I}}} = \\
& = \frac{\partial \lambda}{\partial x^{\bar{I}_2}} \frac{\partial \chi}{\partial p_{\bar{I}}} - \frac{\partial L_{\lambda}}{\partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} - \frac{\partial L_0}{\partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} + \frac{\partial L_0}{\partial p_I} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}}.
\end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
U_1 \varphi = & \mu_I^{+1/2} \left\{ \frac{\partial \lambda}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial p_{\bar{I}}} - \frac{\partial L_0}{\partial p_I} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} - \frac{\partial L_{\lambda}}{\partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial p} \chi - \frac{\partial \lambda}{\partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} + \right. \\
& + \frac{\partial \lambda}{\partial x^I} \frac{\partial \chi}{\partial p_I} - \frac{\partial L_0}{\partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} + \frac{\partial L_0}{\partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^I \partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \lambda}{\partial p_I} \frac{\partial \chi}{\partial p_{\bar{I}}} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^I \partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial \lambda}{\partial x^{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial p_I} - \\
& - \frac{\partial \lambda}{\partial x^I} \frac{\partial \chi}{\partial p_I} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial p_{\bar{I}} \partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial \lambda}{\partial x^{\bar{I}_2}} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^I \partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial \lambda}{\partial p_I} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} + \left. \frac{\partial \lambda}{\partial p_{\bar{I}}} \frac{\partial \chi}{\partial x^{\bar{I}}} \right\}, \\
& \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial p} - \frac{\partial \lambda}{\partial p} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \left( \frac{\partial L_0}{\partial p} - \frac{\partial \lambda}{\partial p} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial p} - i \frac{\partial L}{\partial h} \Big|_{h=0} = \\
& = - \left[ \frac{d}{d\tau} + \left( \frac{\partial L_0}{\partial p} - \frac{\partial \lambda}{\partial p} \right) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial p} + i \frac{\partial L}{\partial h} \Big|_{h=0} \right] \chi.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\chi = & - \left( \frac{d}{d\tau} + \left( \frac{\partial L_0}{\partial p} - \frac{\partial \lambda}{\partial p} \right) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial p} + i \frac{\partial L_0}{\partial h} \Big|_{h=0} \right) \chi \pmod{R(L_0)}.
\end{aligned}$$



## ЛИТЕРАТУРА

Арнольд В. И.

1. О характеристическом классе, входящем в условие квантования.— Функц. анализ и его приложения, 1967, 1, № 1, с. 1—14.
2. Интегралы быстроосциллирующих функций и особенности проекций лагранжевых многообразий.— Функц. анализ и его приложения, 1972, 6, № 3, с. 61, 62.
3. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля  $A_k$ ,  $D_k$ ,  $E_k$  и лагранжевы особенности.— Функц. анализ и его приложения, 1972, 6, № 4, с. 3—26.
4. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.
5. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1971.

Альперт Я. Л.

1. Распространение радиоволн и ионосфера.— М.: Изд-во АН СССР, 1960.

Атья М.

1. Лекции по  $K$ -теории.— М.: Мир, 1967.

Бабич В. М., Булдырев В. С.

1. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач.— М.: Наука, 1972.

Березин Ф. А.

1. Метод вторичного квантования.— М.: Наука, 1965.

Боровиков В. А.

1. Дифракция на многоугольниках и многогранниках.— М.: Наука, 1966.

Бреховских Л. М.

1. Волны в слоистых средах.— М.: Наука, 1973.

Брейндс

1. Асимптотические методы в анализе.— М.: ИЛ, 1961.

Буслаев В. С.

1. Квантование и метод ВКБ.— Труды Матем. ин-та АН СССР, 1970, 110, с. 5—28.
2. Производящий интеграл и канонический оператор Маслова в методе ВКБ.— Функц. анализ и его приложения, 1969, 3, № 3, с. 17—31.

Вазов В.

1. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1968.

Вайнберг Б. Р.

1. О коротковолновой асимптотике решений стационарных задач и асимптотике при  $t \rightarrow \infty$  решений нестационарных задач.— УМН, 1975, 30, вып. 2, с. 3—55.

Вайнштейн Л. А.

1. Теория дифракции и метод факторизации.— М.: Сов. радио, 1966.

Вейль Г.

1. Классические группы, их инварианты и представления.— М.: ИЛ, 1947.

Виноградов А. М.

1. Алгебра логики теории линейных дифференциальных операторов.— ДАН СССР, 1972, 205, № 5.

Виноградов А. Н., Красильщик И. С., Лычагин В. В.

1. Применение нелинейных дифференциальных уравнений.— М.: МИИГА, 1977.

Виноградов А. М., Красильщик И. С.

1. Что такое гамильтонов формализм?— УМН, 1975, 30, вып. 1, с. 173—198.

Виноградов А. М., Купершмидт Б. А.

1. Структура гамильтоновой механики.— УМН, 1977, 32, вып. 4, с. 175—236.

Вишик М. И., Люстерник Л. А.

1. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— УМН, 1957, 12, вып. 5, с. 3—122.

Владимиров В. С.

1. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1975.

Воробьев Е. М.

1. Об одном асимптотическом методе расчета резонаторов.— Труды МИЭМ, 1968, 4, с. 126—145.

Гельфанд И. М., Шнлов Г. Е.

1. Обобщенные функции.— М.: Физматгиз, 1957; 1958. Вып. I; II, III.

Гординг Л.

1. Задача Коши для гиперболических уравнений.— М.: ИЛ, 1961.

Гинзбург В. Л.

1. Распространение электромагнитных волн в плазме.— М.: Физматгиз, 1960.

Евграфов М. А.

1. Асимптотические оценки и целые функции.— М.: Физматгиз, 1960.

Егоров Ю. В.

1. Канонические преобразования и псевдодифференциальные операторы.— Труды Моск. матем. об-ва, 1971, 25, с. 3—28.

2. О разрешимости дифференциальных уравнений с простыми характеристиками.— УМН, 1971, 26, вып. 2, с. 183—198.

Егоров Ю. В., Попиванов П. Р.

1. Об уравнениях главного типа, не имеющих решений.— УМН, 1974, 29, вып. 2, с. 172—189.

Зоммерфельд А.

1. Оптика.— М.: ИЛ, 1953.
2. Строение атома и спектры.— М.: Гостехиздат, 1956.

Картан Э.

1. Интегральные инварианты.— М.; Л.: Гостехиздат, 1940.

Кравцов Ю. А.

1. Об одной модификации метода геометрической оптики.— Известия вузов. Радиофизика, 1964, 7, № 4, с. 664—674.
2. Приближения геометрической оптики для неоднородных сред и примыкающие к нему асимптотические методы.— В кн.: Аналитические методы в теории дифракции и распространения волн, М., 1967, с. 257—362.
3. Комплексные лучи и комплексные каустики.— Известия вузов. Радиофизика, 1967, 10, № 9; 10, с. 1283—1304.
4. О двух новых асимптотических методах теории распространения волн в неоднородных средах.— Акустич. журнал, 1968, 14, № 1, с. 3—21.
5. Асимптотическое решение для уравнений Максвелла вблизи каустики.— Известия вузов. Радиофизика, 1964, 7, № 6, с. 1049—1056.
6. Модификация метода геометрической оптики для волны, просачивающейся за каустику.— Известия вузов. Радиофизика, 1965, 8, № 4, с. 659—668.

Курят Р.

1. Уравнения с частными производными.— М.: Мир, 1964.

Кучеренко В. В.

1. Квазиклассическая асимптотика функции точечного источника для стационарного уравнения Шредингера.— Теор. и матем. физика, 1, № 3, 1969, 1, № 3, с. 384—406.
2. Асимптотические решения уравнения с комплексными характеристиками.— Матем. сб., 1974, 95, № 2, с. 163—213.
3. Асимптотические решения системы  $A^{\infty}\left(x, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right)$  при  $h \rightarrow 0$  в случае характеристик переменной кратности.— Известия АН СССР. Сер. матем., 1974, 38, № 3, с. 625—662.
4. Асимптотические решения задачи Коши для уравнений с комплексными характеристиками.— В кн.: Современные проблемы математики. М., Изд-во ВИНТИ, 1966, с. 41—136, вып. 8.
5. Параметрикс для уравнений с вырождающимся символом.— ДАН СССР, 1976, 229, № 4, с. 797—800.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.

1. Квантовая механика, (нерелятивистская теория).— М.: Наука, 1975.
2. Теория поля.— М.: Наука, 1960.

Леонтович М. А.

1. Об одном методе решения задач о распространении электромагнитных волн.— Известия АН СССР. Сер. физич., 1944, 8, № 1.

Лере Ж.

1. Задача Коши.— Математика, 1959, 3: 5.
2. Дифференциальное и интегральное исчисление на комплексном аналитическом многообразии.— М.: ИЛ, 1961.

Лере Ж., Гординг Л., Котаке Т.

1. Задача Коши.— М.: Мир, 1967.
2. Лучевое приближение вопросов распространения радиоволн.— В кн.: Современные проблемы физики, М.: 1971.

Лычагин В. В.

1. Локальная классификация нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.— УМН, 30, № 1, 1975, 30, вып. 1, с. 101—171.

Маслов В. П.

1. Теория возмущений и асимптотические методы.— М.: Изд-во МГУ, 1965.
2. О регуляризации задачи Коши для псевдодифференциальных уравнений.— ДАН, 1967, 177, № 6, с. 1277—1280.
3. Метод ВКБ в многомерном случае. В кн.: Хединг Дж., Введение в метод фазового интеграла, М.: Мир, 1965.
4. Операторные методы.— М.: Наука, 1973.

Маслов В. П., Стернин Б. Ю.

1. Канонический оператор (комплексный случай).— В кн.: Итоги науки. М.: Изд-во ВИНТИ, 1973, с. 169—195.

Маслов В. П., Федорюк М. В.

1. Канонический оператор (вещественный случай).— В кн.: Итоги науки, М.: Изд-во ВИНТИ, 1973, с. 85—167.
2. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики.— М.: Наука, 1976.

Милнор Дж.

1. Теория Морса.— М.: Мир, 1965.

Мищенко А. С., Стернин Б. Ю.

1. Канонический оператор в прикладной математике.— М.: МИЭМ, 1973.

Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е.

1. Канонический оператор Маслова. Комплексная теория.— М.: МИЭМ, 1974.
2. Геометрия комплексного фазового пространства и канонический оператор Маслова.— В кн.: Современные проблемы математики. М.: Изд-во ВИНТИ, 1977, с. 3—39, вып. 8.

Новиков С. П.

1. Алгебраическое построение и свойства эрмитовых аналогов  $K$ -теории над кольцами с инволюцией с точки зрения гамильтонова формализма. Некоторые применения к дифференциальной топологии и теории характеристических классов.— Известия АН СССР. Серия матем., 1970, 34, № 2, с. 253—288, ч. I.
2. Алгебраическое построение и свойства эрмитовых аналогов  $K$ -теории над кольцами с инволюцией с точки зрения гамильтонова формализма. Некоторые приложения к дифференциальной топологии характеристических классов.— Известия АН СССР. Серия матем., 1970, 34, № 3, с. 475—500, ч. II.

Олейник О. А., Радкевич Е. В.

1. Уравнение второго порядка с неотрицательной характеристической формой.— В кн.: Итоги науки. Математический анализ, М.: Изд-во ВИНТИ, 1971.

Понтрягин Л. С.

1. Непрерывные группы, изд. 3.— М.: Наука, 1972.

Ж. де Рам

1. Дифференцируемые многообразия.— М.: ИЛ, 1959.

Рашевский П. К.

1. Геометрическая теория уравнений с частными производными.— М.: Гостехиздат, 1947.

Руденко О. В., Солуян С. И.

1. Теоретические основы нелинейной акустики.— М.: Наука, 1975.

Смирнов В. И.

1. Курс высшей математики.— М.: Гостехиздат, 1951, т. IV.

Соболев С. Л.

1. Волновое уравнение для неоднородной среды.— Труды сейсмологич. ин-та АН СССР, 1930, № 6.
2. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1959.

Стернберг С.

1. Лекции по дифференциальной геометрии.— М.: Мир, 1970.

Стернин Б. Ю.

1. Об условиях квантования в комплексной теории канонического оператора Маслова. Интегральные операторы Фурье.— ДАН СССР, 1977, 232, № 6.
2. О топологическом смысле условий квантования в комплексной теории Маслова.— В кн.: Труды семинара С. Л. Соболева, Новосибирск, 1976, с. 141—156, вып. I.
3. О микролокальной структуре дифференциальных операторов в окрестности точки покоя.— УМН, 1977, 32, вып. 6, с. 235—236.

Стинрод Н.

1. Топология косых произведений.— М.: ИЛ, 1953.

Тихонов А. Н., Самарский А. А.

1. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972; 1977.

Федорюк М. В.

1. Метод перевала, М.: Наука, 1977.
2. Особенности ядер интегральных операторов Фурье и асимптотика решения смешанной задачи, УМН, 1977, 32, вып. 6, с. 67—115.
3. Метод стационарной фазы и псевдодифференциальные операторы.— УМН, 1971, 26, вып. 1, с. 67—112.

Ферми Э.

1. Квантовая механика.— М.: Мир, 1965.

Фок В. А.

1. О каноническом преобразовании в классической и квантовой механике.— Вестник ЛГУ, 1959, 16, с. 67—71.
2. Начала квантовой механики.— М.: Наука, 1976.

Франк Ф., Мизес Р.

1. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики.— М.: ОНТИ, 1937.

Фукс Д. Б.

1. О характеристических классах Маслова — Арнольда.— ДАН СССР, 1968, 178, № 2, с. 303—306.

Фукс Д. Б., Фоменко А. Т., Гутенмахер В. Л.

1. Гомотопическая топология.— М.: Изд-во МГУ, 1969.

Функциональный анализ. Под редакцией С. Г. Крейна.— М.: Наука, 1964.

Хеддинг Дж.

1. Введение в метод фазового интеграла.— М.: Мир, 1965.

Хермандер Л.

1. Линейные дифференциальные операторы с частными производными.— М.: Мир, 1967.

2. Псевдодифференциальные операторы.— В кн.: Псевдодифференциальные операторы, М.: Мир, 1967.
3. Интегральные операторы Фурье.— Математика, 1972, 16:1, с. 17—61; 1972, 16:2, с. 67—136.

Хьюзмоллер Д.

1. Расслоение пространства.— М.: Мир, 1970.

Эрдейи А.

1. Асимптотические методы.— М.: Физматгиз, 1962.

Эйнштейн А.

1. К квантовому условию Зоммерфельда и Эпштейна.— Собр. научн. трудов, М.: Мир, 1966, т. 3.

Andersson K. G.

1. Analytic wave front sets for solutions of linear differential equations of principal type.— Trans. Amer. Math. Soc., 1973, 177.
2. Propagation of analyticity for solutions of differential equations of principal type.— Bull. Amer. Math. Soc., 1972, 78, № 3.

Birkhoff G. D.

1. Quantum mechanics and asymptotic series.— Bull. Amer. Math. Soc., 1933, 39.
2. Some remarks concerning Schrödinger's wave equation.— Proc. nat. Acad. Soc. USA, 1933, 19.

Brillouin L.

1. Remarques sur la mécanique ondulatoire, I.—Phys. Radium, 1926, 7.
2. A practical method for solving Hill's equation.— Quart. Appl. Math., 1948, 6.

Caratheodory C.

1. Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen Erster Ordnung.— Berlin.: Teubner, 1935.

Courant R., Lax P. D.

1. The propagation of discontinuities in wave motion.—Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1956, 42, № 11.

Duistermaat J. J.

1. Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities.— Comm. Pure and Appl. Math., 1974, 27, № 2.

Duistermaat J. J., Hörmander L.

1. Fourier integral operators II.— Acta Math., 1972, 128, № 3, 4.

Jeffreys H.

1. Asymptotic Approximations.—Oxford, 1962.

Helmholtz H.

1. Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd., 1882, 1.

Hörmander L.

1. The calculus of Fourier integral operators.— In Prospects in Mathematics, Princeton University Press, 1972.
2. Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients.— Comm. Pure Appl. Math., 1971, 24.
3. On the existence and the regularity of solutions of linear pseudo-differential equations.— L'Enseignement mathématique, 1971, 17, № 2.

Keller J. B.

1. Diffraction by a convex cylinder.—Trans. IRE Ant. and Prop., 1956, 4, № 3.
2. Corrected Bahr. Sommerfeld quantum conditions for nonseparable systems.—Ann. Phys., 1958, 4, № 2.
3. Geometrical theory of diffraction.—J. Opt. Soc. Amer., 1962, 52.

Keller J. B., Lewis R. M., Seckler B. D.

1. Asymptotic solutions of some diffraction problems.—Comm. pure Appl. Math., 1956, 9.

Keller J. B., Rubinow S.

1. Asymptotic solution of eigenvalue problems.—Ann. Phys., 1963, 9, № 1.

Kline M.

1. Asymptotic solution linear hyperbolic partial equations.—J. of rat. Mech. and Anal., 1954, 3.

Kramers H. A.

1. Quantum mechanics.—Amsterdam, 1957.

Lax P. D.

1. On the stability of difference approximations to solutions of hyperbolic equations with variable coefficients.—Comm. pure appl. Math., 1961, 14, № 3.
2. Differential equations, difference equations and matrix theory.—Comm. pure Appl. Math., 1958, 21, № 2.
3. Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems.—Math. J., 1957, 24, № 4.

Lax P. D., Nirenberg L.

1. On stability for difference schemes; a sharp form carding's inequality, 1966, 19, № 4.

Lax P. D., Richtmyer R. D.

1. Survey of the stability of linear finite difference equations.—Comm. pure Appl. Math., 1956, 9, № 2.

Leray J.

1. Probleme de Cauchy I.—Bull. Soc. Math. France, 1957, 85.
2. Probleme de Cauchy II.—Bull. Soc. Math. France, 1958, 86.
3. Probleme de Cauchy III.—Bull. Soc. Math. France, 1958, 87.
4. Probleme de Cauchy IV.—Bull. Soc. Math. France, 1962, 90.
5. Lectures on hyperbolic equations with variable coefficients.—Princeton.: Inst. for Adv. Study, 1952.
6. Hyperbolic differential equations. Lecture Notes.—Princeton.: Institute for Adv. Study, 1951, 1952.
7. Solutions asymptotiques des equations dérivées particulier.—Rome.: Conv. Intern. Phys. Math., 1972.
8. Solutions asymptotiques et groupe symplectique.—Lect. Notes Math., 1975, 459.

Ludwig D.

1. Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem.—Comm. pure Appl. Math., 1960, 13, № 3.
2. Uniform asymptotic expansion of the field scattering by convex object at high frequencies.—Comm. pure and Appl. math., 1966, 20, № 1.

Luneburg R. K.

1. Mathematical theory of optics.—Providence.: Brand. Univ. Press, 1944.

2. Propagation of electromagnetic. Lecture Notes.— New York University, 1945.
- Malgrange B.**
1. Opérateurs de Fourier (d'après Hörmander et Maslov).— Séminaire Bourbaki, 1971/72, № 411, 24-e année.
- Nagumo M.**
1. Über das Anfangswertproblem partieller Differentialgleichungen.— Japan Journ. of Math., 1941—1943, 18.
- Nirenberg L., Treves F.**
1. On local solvability of linear partial differential equations I. Necessary conditions. II Sufficient conditions.— Comm. pure Appl. Math., 1970, 23.
  2. A correction to «On local solvability of linear partial differential equations II. Sufficient conditions».— Comm. pure Appl. Math., 1971, 24.
- Oshima I.**
1. Singularities in contact geometry and degenerate pseudo-differential equations.— J. of Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1970, 1.
- Petrovsky I. G.**
1. Über das Cauchysche Problem für System von partiellen Differentialgleichungen, 1970.
- Sato M., Kawai T., Kashivara M.**
1. Microfunctions, pseudodifferential equations.— Proceed of Conf. 1971, Lecture Notes in Math. v. 287.
- Schaeffer D., Guillemin V.**
1. Maslov theory and singularities.— Cambridge, 1972.
- Seneor R., Ecman J. P.**
1. The WKB—Maslow method of the harmonic oscillator (to appear in Arch. Rath. Mech.), 1970.
- Soureau J. M.**
1. The WKB—Maslow method.— C. R. Acad. Sci., 1973, 276.
- Treves F.**
1. Approximate solutions to Cauchy problems.— I. J. Differential Equations, 1972, 11, № 2.
  2. Hypoelliptic partial differential equations of principal type with analytic coefficients.— Comm. pure Appl. Math., 1970, 23, № 4.
  3. Hypoelliptic partial differential equations of principal type. Sufficient conditions and necessary conditions.— Comm. pure Appl. Math., 1971, 24.
  4. A new method of proof of the subelliptic estimates.— Comm. Pure Appl. Math., 1971, 24, № 1.
  5. Concatenations of Second-Order Evolution equations applied to local Solvability and hypoellipticity.— Comm. pure Appl. Math., 1973, 24, № 2.
  6. Approximate solutions of Cauchy problems.— J. Diff. equat., 1972, 11.
- Voros A.**
1. Semiclassical approximations.— Saclay preprint, D. Ph., June, 1974.
  2. The WKB—Maslov method for nonseparable systems.— Saclay preprint, D. Ph. July, 1974.



## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгебраический пучок 238  
 Асимптотическое решение порядка  $r$  24  
 Атлас 34  
 — канонических карт 105  
 Векторное поле 54  
 Вложение подмногообразия в многообразие 61  
 Гамильтониан 169  
 Гамильтоново векторное поле 169  
 Гомотопия 84  
 Грассманиан положительных лагранжевых плоскостей 138  
 Группа гомотопическая 99  
 — коомологий де Рама 61  
 — коцепей 62  
 — сечений пучка 238  
 — спектральных коомологий 63  
 Дифференциал отображения 60  
 Дифференциальная форма 57  
 Индекс лагранжева многообразия 120  
 — пересечения многообразий 95  
 Интегральный оператор Фурье 291  
 Канонический оператор локальный 160, 228  
 Каноническое лагранжево погружение с мерой 259  
 — распределение 275  
 Карта каноническая 105  
 — локальная 34  
 Квантования условия 119  
 Квантованное лагранжево многообразие 119  
 Комплекс симплицитальный 63  
 — цепной 61  
 Коцепь 62  
 Коцикл 62  
 Край многообразия 36  
 Критическая точка функции 84  
 Лагранжев грассманиан  $G_{2n}^{SO}(I_n)$  116  
 Лагранжева плоскость 109  
 — вещественная 114  
 — положительная 134  
 Лагранжево вложение 156  
 Многообразие гладкое 33  
 — Грассмана 45  
 — замкнутое 35  
 Многообразие лагранжево 102  
 — ориентированное 58  
 — с краем 35  
 Многообразий отображение 58  
 Общее положение подмногообразий 78  
 Оператор Гамильтона 173  
 — Гамильтона—Якоби локальный 181  
 — интегральный Фурье 284  
 — переноса локальный 181  
 — псевдодифференциальный 285  
 Ориентация 58  
 Отображение алгебраических пучков 238  
 Плотность на многообразии 272  
 — распределения на многообразии 273  
 Преобразование симплектическое 110  
 Пространство однородное 45  
 — проективное 45  
 — расслоения 46  
 Разбиение единицы 36  
 Расслоение касательное 53  
 — локально тривиальное 46  
 — нормальное 79  
 Расслоения база 46  
 — обратный образ 47  
 — слой 46  
 — эквивалентные 48  
 Регулярная точка 76  
 Сечение гладкое 52  
 — расслоения 48  
 Символ интегрального оператора Фурье 284  
 Система координат каноническая 103  
 Стационарная точка 201  
 Теорема Гуревича 100  
 Трансверсальная регулярность 77  
 Трансверсальное пересечение 78  
 Уравнение Гамильтона—Якоби 15  
 — переноса 15  
 Фазовое пространство 102  
 — — комплексное 108  
 Фактор-расслоение 51  
 Формула Стокса 65, 68  
 Функция Морса 85  
 — склейки 46

